MIRCEA RADEŞ

REZISTENȚA MATERIALELOR I

Editura PRINTECH

MIRCEA RADEŞ

REZISTENȚA MATERIALELOR

I

Editura Printech
2010

Prefață

Lucrarea reprezintă cursul de Rezistența materialelor care se predă studenților anului IIA al facultății de Inginerie Mecanică şi Mecatronică, la Universitatea Politehnica Bucureşti. În ediția de față, partea teoretică depăşeşte materia predată efectiv la curs, în schimb numărul aplicațiilor a fost redus.

Tradițional, în prima parte a cursului se studiază bare şi sisteme de bare. Relațiile de calcul stabilite în Rezistența materialelor sunt strict valabile în cazul barelor cu secțiune compactă constantă, la care se adoptă ipoteza nedeformabilității secțiunii transversale. Ele pot fi extinse la corpuri cu variație mică şi monotonă a secțiunii în lungul axei longitudinale şi, cu anumite corecții privind concentrarea locală a tensiunilor, la bare cu secțiunea variabilă în trepte. În partea a doua a cursului se mai studiază tuburi axial-simetrice cu pereți groşi, discuri de grosime constantă în mişcare de rotație şi plăci plane subțiri. Studiul general al barelor cu pereți subțiri face obiectul unor cursuri diferite.

În lucrare se definesc eforturile secționale în bare, tensiunile şi deformațiile specifice, deformațiile şi deplasările punctelor corpurilor elastice. Se calculează variația eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma unor diagrame de eforturi. Barele sunt solicitate la întindere (compresiune), forfecare, încovoiere şi răsucire, fie separat, fie în diferite combinații. Se calculează distribuția tensiunilor normale şi tangențiale în secțiunea transversală, şi se determină punctele în care apar tensiunile maxime şi valorile acestora care se compară separat, sau combinate într-o tensiune normală echivalentă, cu rezistențele admisibile.

La rezolvarea problemelor static nedeterminate sunt necesare patru tipuri de relații: 1) ecuații de echilibru; 2) condiții de compatibilitate sau relații între deformații specifice şi deplasări; 3) ecuații constitutive sau relații între tensiuni şi deformații specifice; şi 4) condiții la limită, de rezemare sau de solicitare pe contur. Utilizarea acestora este menționată pentru fiecare tip de solicitare.

Cursul de Rezistența materialelor predat la facultățile cu profil mecanic îmbină noțiuni de Mecanica materialelor şi Teoria elasticității, cu criterii de curgere şi teorii de rezistență, elemente de stabilitate elastică a barelor şi stări de tensiuni în corpuri axial-simetrice, calculul la solicitări dinamice şi oboseală, calculul la solicitări în domeniul plastic.

Modificarea în timp a structurii cursului a fost determinată de utilizarea calculatoarelor, introducerea materialelor compozite, dezvoltarea mecanicii ruperii,

a calculului la oboseală şi a metodei elementelor finite. Acestea au impus dezvoltarea unor metode noi pentru calculul proprietăților geometrice ale secțiunilor de formă oarecare, al deformațiilor arborilor cu secțiune variabilă şi al sistemelor static nedeterminate în general. Ca urmare, s-a introdus calculul tensiunilor în compozite stratificate armate cu fibre şi în bare cu secțiune eterogenă, metoda deplasărilor pentru calculul sistemelor de bare, calculul la oboseală la durată de viață limitată bazat pe analiza deformațiilor specifice şi pe analiza propagării fisurilor, precum şi o descriere mai detaliată a caracteristicilor mecanice ale metalelor la solicitări monotone şi solicitări ciclice.

Cursul a fost analizat şi aprobat de o comisie a Consiliului profesoral al facultății de Inginerie mecanică în anul 2003.

Autorul

Cuprins

Prefață **1**

Cuprins **3**

1. Modelarea corpurilor deformabile **7**

1.1 Modelarea corpurilor 7

1.2 Modelarea sarcinilor 10

1.3 Modelarea reazemelor 11

1.4 Ipotezele rezistenței materialelor 12

2. Eforturi în bare **15**

2.1 Metoda secționării 15

2.2 Convenții de semne 16

2.3 Definiția eforturilor 17

2.4 Relații diferențiale de echilibru la bare drepte 20

2.5 Diagrame de eforturi la bare drepte 22

2.6 Diagrame de eforturi la bare cotite plane 29

2.7 Diagrame de eforturi la bare cotite spațiale 32

2.8 Relații diferențiale de echilibru la bare curbe plane 35

2.9 Diagrame de eforturi la bare curbe plane 36

3. Tensiuni şi deformații specifice **41**

3.1 Tensiuni 41

3.2 Convenții de semne pentru tensiuni 43

3.3 Relații între eforturi şi tensiuni 44

3.4 Sisteme de tensiuni static determinate 45

3.5 Deformații specifice 51
3.6 Relații între tensiuni şi deformații specifice 54

4. Caracteristici mecanice la încărcări monotone 55
4.1 Încercarea la tracțiune uniaxială 55
4.2 Contracția transversală 62
4.3 Tensiuni şi deformații specifice reale 63
4.4 Încercări la compresiune şi la forfecare 66
4.5 Efectul temperaturii şi vitezei de deformare 69
4.6 Rezistențe admisibile 69

5. Întinderea şi compresiunea barelor 71
5.1 Tensiuni şi deformații la întindere 71
5.2 Energia de deformație la întindere 73
5.3 Sisteme static nedeterminate 74
5.4 Concentrarea tensiunilor 83
5.5 Tensiuni pe o suprafață înclinată față de axa barei 86

6. Răsucirea barelor 93
6.1 Calculul momentului de răsucire 93
6.2 Tensiuni în bare de secțiune axial-simetrică 94
6.3 Caracteristicile geometrice Ip şi Wp 98
6.4 Deformații la răsucire 99
6.5 Energia de deformație la răsucire 100
6.6 Răsucirea barelor cu secțiune dreptunghiulară 101
6.7 Răsucirea profilelor deschise cu pereți subțiri 103
6.8 Răsucirea profilelor închise cu pereți subțiri 106
6.9 Calculul arcurilor cilindrice elicoidale 109
6.10 Sisteme static nedeterminate solicitate la răsucire 111
6.11 Concentrarea tensiunilor la răsucirea barelor 114

7. Proprietăți ale secțiunilor plane **123**

7.1 Momente statice ale suprafețelor plane 123

7.2 Momente de inerție ale suprafețelor plane 125

7.3 Variația momentelor de inerție cu translația axelor 130

7.4 Variația momentelor de inerție cu rotația axelor 132

8. Încovoierea barelor **143**

8.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică 143

8.2 Tensiuni la încovoierea oblică 156

8.3 Tensiuni de forfecare la încovoierea simplă 166

8.4 Deformații la încovoiere 175

8.5 Bare cu secțiune variabilă 188

8.6 Bare cu secțiune eterogenă 193

8.7 Centrul de forfecare 202

8.8 Tensiuni în bare curbe 205

9. Stări de tensiuni şi deformații specifice **211**

9.1 Starea tridimensională de tensiuni 212

9.2 Starea plană de tensiuni 219

9.3 Ecuații diferențiale de echilibru 225

9.4 Starea plană de deformații specifice 227

9.5 Legea lui Hooke generalizată 231

9.6 Ecuația lui Poisson 233

9.7 Energia de deformație 234

9.8 Compozite armate cu fibre 236

9.9 Tensiuni termice 245

9.10 Tensiuni de contact 247

10. Teorii de rezistență **249**

10.1 Teoriile clasice de rezistență 250

10.2 Criterii de curgere 252
10.3 Criterii de rupere la materiale fragile 254
10.4 Aplicarea teoriilor de rezistență la stări plane de tensiuni 256
10.5 Aplicarea teoriilor de rezistență la bare 257
10.6 Criteriul Tsai-Hill pentru compozite stratificate 257

11. Solicitări combinate 261
11.1 Întinderea excentrică 261
11.2 Bare solicitate la încovoiere şi răsucire 268
11.3 Bare solicitate la întindere şi răsucire 272
11.4 Tensiuni termice în bare curbe 274

Bibliografie 279
Anexe 283
Index 303

1.
MODELAREA CORPURILOR DEFORMABILE

Materialele utilizate în practica inginerească sunt deformabile. Sub acțiunea sarcinilor exterioare şi a variațiilor de temperatură, particulele care le compun îşi modifică poziția relativă, ceea ce duce la modificarea formei şi dimensiunilor pieselor şi structurilor.

Rezistența materialelor urmăreşte stabilirea unor relații între sarcinile exterioare aplicate corpurilor deformabile, pe de o parte, şi tensiunile şi deformațiile produse de acestea, pe de altă parte. Pe baza acestor relații, se poate face dimensionarea elementelor constructive ale maşinilor, astfel încât să reziste sarcinilor la care sunt supuse în timpul funcționării, în condiții date de mediu ambiant.

În rezolvarea problemelor, structura reală este înlocuită printr-un model de calcul. În acest scop, se adoptă ipoteze simplificatoare privind: 1) forma şi dimensiunile elementelor componente; 2) caracterul şi distribuția sarcinilor aplicate; 3) proprietățile mecanice ale materialelor.

1.1 Modelarea corpurilor

În funcție de forma şi caracteristicile geometrice, în Rezistența materialelor se studiază următoarele tipuri de corpuri:

1. *Barele şi firele*, la care o dimensiune - lungimea - este predominantă în raport cu celelalte două. Se poate considera că o bară este generată prin deplasarea unei suprafețe plane, deobicei de secțiune constantă, în lungul unei curbe (fig. 1.1), astfel încât normala la suprafață, în centrul ei de greutate, să rămână mereu tangentă la curbă.

Axa barei este linia care uneşte centrele de greutate ale secțiunilor transversale. Secțiunea transversală este perpendiculară pe axa barei. *Barele* sunt corpuri a căror lungime este mare în comparație cu dimensiunile secțiunii transversale.

Barele pot fi drepte, cotite sau curbe, de secțiune constantă sau variabilă. În figura 1.2 se prezintă câteva tipuri de secțiuni uzuale pentru bare.

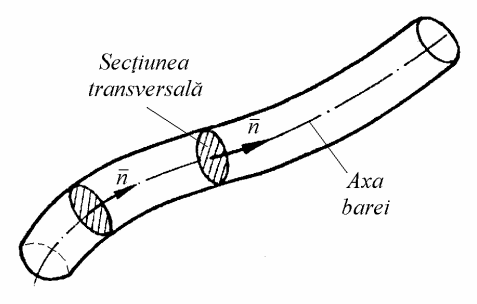


Fig. 1.1

Barele solicitate la încovoiere se mai numesc *grinzi*, cele solicitate la întindere sunt *tiranți*, iar cele solicitate la întindere şi compresiune sunt *tije*, *zăbrele* şi *contrafişe*. Barele verticale solicitate la compresiune poartă numele de *coloane* sau *stâlpi*. *Arborii* sunt bare solicitate la răsucire şi încovoiere (fig. 1.3).

În general, în cadrul Rezistenței materialelor se studiază *bare de secțiune compactă*. O categorie aparte o formează *barele cu pereți subțiri*, cu profil deschis sau închis. Bara cu pereți subțiri este un corp a cărui lungime este mare şi a cărui grosime este mică în comparație cu dimensiunile generale ale secțiunii transversale.

Firele au aceleaşi caracteristici geometrice ca unele bare, dar sunt flexibile, adică au rigiditate la încovoiere neglijabilă, putând fi solicitate numai la întindere.

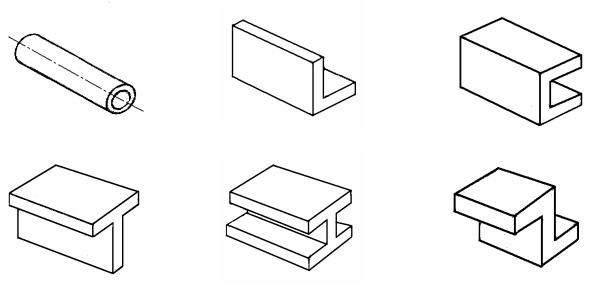


Fig. 1.2

2. *Plăcile şi învelişurile*, la care o dimensiune - grosimea - este mult mai mică decât celelalte două. Elementele geometrice caracteristice ale plăcilor sunt suprafața mediană (plană sau curbă) şi grosimea - măsurată pe o normală la suprafața mediană. Plăcile pot fi *planşee*, *panouri*, *pereți, acoperişuri* sau *radiere* (fig. 1.3). *Membranele* au grosimea foarte mică şi nu pot prelua sarcini transversale sau de compresiune.

3. *Corpurile masive şi blocurile*, la care cele trei dimensiuni au acelaşi ordin de mărime (de exemplu, bilele şi rolele rulmenților, suporturile masive, blocurile de fundație etc.).

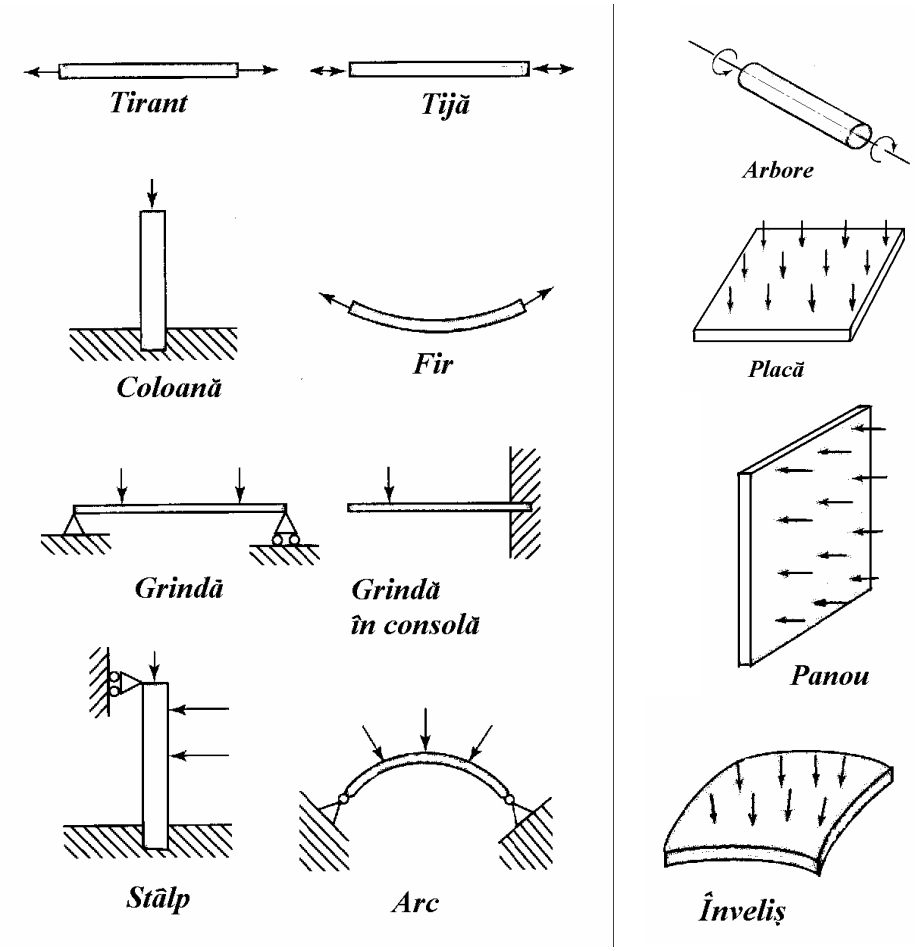


Fig. 1.3

De reținut că barele, plăcile, învelişurile etc. sunt modele ale Mecanicii solidelor deformabile, schematizări ale organelor de maşini şi elementelor de construcții, convenabile pentru stabilirea relațiilor de calcul al tensiunilor şi deformațiilor, şi al dimensiunilor acestora. În ce măsură o anumită piesă poate fi modelată ca bară sau placă, care este limita între o bară scurtă şi o placă, sau între o placă şi o membrană, sunt întrebări la care inginerul mecanic trebuie să răspundă.

1.2 Modelarea sarcinilor

Sarcinile exterioare aplicate corpurilor sunt rezultatul interacțiunii mecanice sau al acțiunii unor câmpuri (magnetic, gravitațional, centrifugal, termic etc.).

În general, se disting:

- *forțe concentrate* (*F* în fig.1.4), care se măsoară în unități de forță (N);
- *sarcini distribuite* pe un element liniar (*q* în fig. 1.4), care se măsoară în N/m, sarcini distribuite pe o suprafață (*p* în fig. 1.4), care se măsoară, de exemplu, în N/m^2, şi sarcini distribuite într-un volum, măsurate în N/m^3.

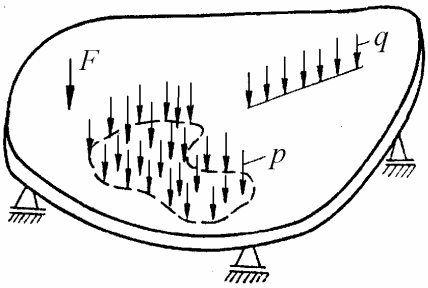


Fig. 1.4

Sarcinile distribuite pot fi: 1) uniform distribuite (*q* = const.) - ca în cazul greutății proprii a unei bare sau a unui fir de secțiune constantă, 2) distribuite liniar - ca în cazul presiunii hidrostatice pe un perete vertical şi 3) sarcini distribuite conform unei legi date, ca presiunea vântului pe o structură etc.

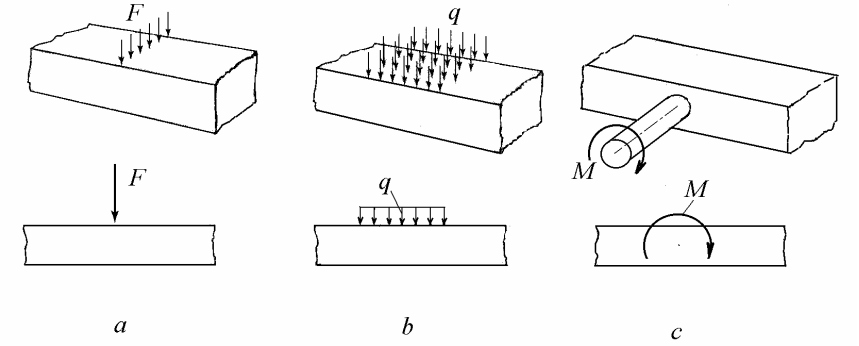


Fig. 1.5

Sarcinile aplicate unei grinzi (fig. 1.5) pot fi forțe concentrate, sarcini distribuite pe unitatea de lungime şi momente concentrate. Primele sunt ilustrate în figura 1.5, *a* în care sarcina acționează de fapt pe suprafața barei în lungul unei linii

perpendiculare pe axa longitudinală. Aceasta este o idealizare. În realitate o sarcină concentrată este de fapt distribuită pe o porțiune foarte mică a barei.

O sarcină distribuită este ilustrată în figura 1.5, *b*. Intensitatea sarcinii este considerată constantă pe lățimea barei, dar poate avea o distribuție oarecare în lungul barei.

Un moment concentrat este arătat în figura 1.5, *c*. El apare fie dintr-un moment de răsucire transmis de la o altă bară perpendiculară pe cea încovoiată, fie dintr-un cuplu de forțe concentrate, egale şi de sens contrar, care se reduce la un cuplu concentrat.

În funcție de locul de aplicare, se deosebesc:

- *sarcini de suprafață*, aplicate la suprafața corpului, care rezultă de obicei din interacțiunea mecanică între corpuri;
- *forțe masice* (volumice), aplicate în toată masa corpului, care rezultă din acțiunea unui câmp (gravitațional, centrifugal, magnetic, termic etc.).

În funcție de modul de variație în timp, se pot considera:

- *forțe aplicate static*, a căror intensitate creşte monoton, de la zero la valoarea nominală, într-un timp relativ lung, pe măsura deformării corpului, rămânând apoi constante;
- *forțe aplicate dinamic*, care ating valoarea nominală într-un timp relativ scurt, mai mic sau comparabil cu perioada proprie de vibrație a elementului sau structurii solicitate.

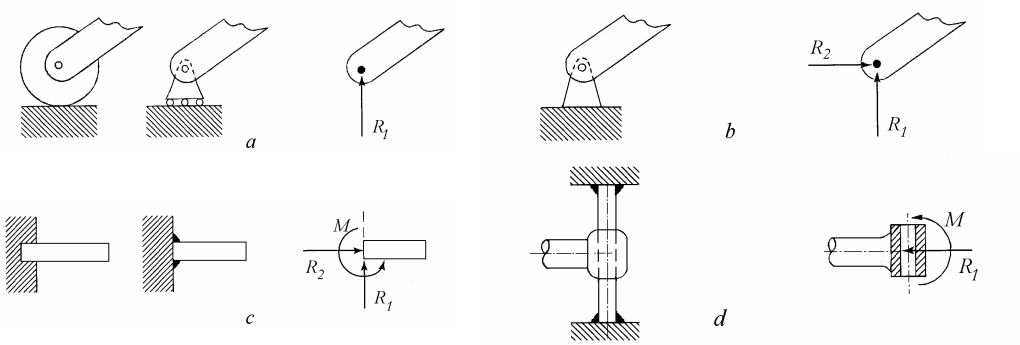


Fig. 1.6

1.3 Modelarea reazemelor

La structuri plane, capetele barelor pot fi rezemate ca în figura 1.6. *Reazemul simplu rigid* (fig. 1.6, *a*) permite deplasarea paralelă cu linia de suport şi rotirea, dar blochează deplasarea perpendiculară pe linia de suport, deci acționează asupra barei cu o reacțiune perpendiculară pe linia de suport.

Articulația rigidă (fig. 1.6, *b*) permite numai rotirea capătului barei, deci acționează cu o reacțiune de mărime şi direcție necunoscute, care se descompune în două componente perpendiculare între ele.

Încastrarea rigidă fixă (fig. 1.6, *c*) blochează toate cele trei grade de libertate ale capătului barei şi produce ca reacțiuni un moment şi o forță reprezentată prin cele două componente. *Încastrarea rigidă mobilă* (fig. 1.6, *d*) permite deplasarea pe o direcție, deci produce ca reacțiuni un moment şi o forță perpendiculară pe direcția de mişcare.

În structurile reale, atunci când nu se poate neglija deformabilitatea reazemelor, acestea se modelează prin reazeme elastice, la care forțele sunt proporționale cu deplasările, sau încastrări elastice, la care momentul este proporțional cu rotirea.

1.4 Ipotezele Rezistenței materialelor

În vederea simplificării relațiilor de calcul, în Rezistența materialelor se adoptă următoarele ipoteze privind proprietățile materialelor:

1. *Ipoteza mediului continuu*, prin care se admite că tot volumul unui corp este ocupat de substanță.

2. *Ipoteza mediului omogen*, în baza căreia proprietățile fizice (de exemplu, densitatea de masă) se consideră constante în orice punct al unui corp.

3. *Ipoteza mediului izotrop*, potrivit căreia în orice punct al corpului proprietățile mecanice nu depind de direcție (în particular, de direcția de aplicare a solicitării).

4. *Ipoteza mediului elastic*. Sub acțiunea solicitării exterioare un corp elastic se deformează instantaneu, iar la îndepărtarea sarcinii revine instantaneu la forma şi dimensiunile inițiale. De asemenea, acțiunea unei forțe într-un punct oarecare se transmite instantaneu în tot corpul.

Ultimele două ipoteze sunt reconsiderate în capitole speciale despre materiale compozite, bare cu secțiuni eterogene sau solicitări în domeniul elasto-plastic.

În afara celor patru ipoteze privind materialele, menționate mai sus, în Rezistența materialelor se admit şi următoarele simplificări:

5. *Ipoteza liniarității* relațiilor cauză-efect. În particular se admit relații liniare între forțe şi deformații, precum şi între eforturi şi tensiuni. La sisteme liniare se poate aplica principiul suprapunerii efectelor. Ca urmare, ordinea aplicării sarcinilor exterioare nu influențează starea finală de tensiuni şi deformații a corpurilor.

6. *Ipoteza deformaţiilor mici,* conform căreia se consideră că deformaţiile corpurilor elastice sunt mici în comparaţie cu dimensiunile acestora. Prin această ipoteză se exclud *neliniarităţile geometrice*, adică cele determinate de forma corpurilor, precum şi *neliniarităţile fizice*, menţinând solicitările la valori reduse sau la care relaţiile între eforturi şi deformaţii sunt liniare.

Se consideră că deformaţiile mici ale corpurilor nu afectează acţiunea forţelor (de exemplu, direcţia acestora) şi sunt neglijabile în calculul solicitărilor. Ca urmare, la calculul reacţiunilor din reazeme, se consideră corpurile nedeformate, aplicând ecuaţiile de echilibru din statică, la fel ca la corpurile rigide. Acesta este un *calcul de ordinul I*, considerat acceptabil pentru rezolvarea majorităţii problemelor de Rezistenţa materialelor. În unele studii, de exemplu de stabilitate elastică, se face un *calcul de ordinul II*, în care ecuaţiile de echilibru se scriu pentru starea deformată a corpurilor, menţinând ipoteza deformaţiilor mici. În cazul deformaţiilor mari se face un *calcul de ordinul III,* bazat pe ecuaţii neliniare.

7. *Principiul echivalenţei acţiunii la distanţă a sarcinilor* (Barré de Saint Venant - 1855*).* Dacă asupra unui corp elastic acţionează două sisteme de sarcini exterioare, echivalente din punct de vedere static, atunci, la distanţă suficient de mare de zona de aplicare a acestora, efectul lor este acelaşi.

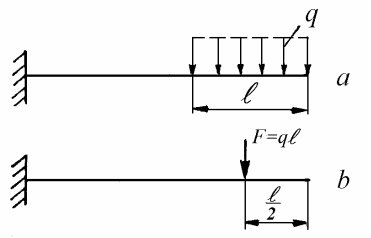


Fig. 1.7

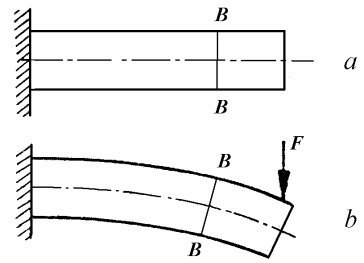


Fig. 1.8

Astfel, sarcina distribuită q şi forţa F din figura 1.7, echivalente din punct de vedere static, produc local distribuţii diferite de tensiuni şi deplasări, dar la distanţă, de exemplu în încastrare, efectul lor este acelaşi.

8. *Ipoteza secţiunii plane* (Jakob Bernoulli - 1744). O secţiune plană şi perpendiculară pe axa unei bare nesolicitate, rămâne plană şi perpendiculară pe axa barei şi după aplicarea sarcinilor exterioare. De exemplu, secţiunea *B-B*, normală la axa nedeformată a barei din figura 1.8, *a*, rămâne plană şi perpendiculară pe axa deformată a barei (fig.1.8, *b*) şi după aplicarea forţei *F*.

Ipoteza secţiunii plane este valabilă la bare cu variaţie lentă a momentelor încovoietoare şi a forţelor axiale în lungul barei. Variaţia momentelor încovoietoare datorită forţelor tăietoare produce deformaţii de forfecare care *deplanează* secţiunea transversală. Efectul este neglijabil doar la bare zvelte, aşa

cum se arată în capitolul 6. În cazul răsucirii, ipoteza secțiunii plane este valabilă doar la bare cu secțiune axial-simetrică.

Primele şapte ipoteze sunt comune Rezistenței materialelor şi Teoriei elasticității. Ipoteza lui Bernoulli este specifică Rezistenței materialelor. În studiul plăcilor subțiri, se adoptă *ipoteza normalei rectilinii* (ipoteza lui Kirchhoff) conform căreia o linie dreaptă şi normală la suprafața mediană nedeformată rămâne dreaptă şi perpendiculară pe suprafața mediană deformată a plăcii în urma solicitării.

Alături de ipotezele menționate, în special la studiul barelor cu pereți subțiri, se adoptă următoarele "ipoteze de bară":

9. *Ipoteza constanței secțiunii transversale*. Barele sunt în general corpuri cilindrice sau cu variație mică a secțiunii în lungul barei.

Relațiile de calcul stabilite în Rezistența materialelor sunt strict valabile în cazul barelor cu secțiune compactă constantă. Ele pot fi extinse la corpuri cu variație mică şi monotonă a secțiunii în lungul axei longitudinale şi, cu anumite corecții privind concentrarea locală a tensiunilor, la bare cu secțiunea variabilă în trepte.

10. *Ipoteza nedeformabilității secțiunii transversale*. Secțiunea barei are deplasări transversale ca rigid şi deplasări elastice normale la planul secțiunii transversale. La barele cu profil închis, forma secțiunii transversale nu se modifică iar proiecția pe planul secțiunii inițiale rămâne aceeaşi. La barele cu pereți subțiri secțiunea transversală se poate deplana. Împiedicarea deplanării produce tensiuni suplimentare. La torsiunea barelor de secțiune circulară, diametrele secțiunilor transversale se consideră că rămân linii drepte. La bare cu secțiunea în I sau T, se admite că tălpile rămân perpendiculare pe inimă.

Tradițional, în Rezistența materialelor se studiază bare şi sisteme de bare. Studiul plăcilor plane subțiri, al tuburilor axial-simetrice cu pereți groşi şi al discurilor de grosime constantă în mişcare de rotație se face uneori la Rezistența materialelor, dar constituie obiectul *Teoriei aplicate a elasticității*. Studiul barelor cu pereți subțiri şi al structurilor şi componentelor din materiale compozite face obiectul unor capitole speciale sau al unor cursuri aparte.

2.
EFORTURI ÎN BARE

Barele sunt solicitate la întindere, compresiune, forfecare, încovoiere şi răsucire, fie separat, fie în diferite combinații. În acest capitol se definesc *eforturile* secționale care produc aceste solicitări şi convențiile de semne aferente. Se calculează variația eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma unor *diagrame de eforturi*. La bare de secțiune constantă, acestea permit stabilirea secțiunii în care solicitarea este maximă.

2.1 Metoda secționării

Fie o bară elastică, în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare F_1, F_2, q,..., F_4 şi a reacțiunilor din reazeme R_1, R_2, R_3 (fig. 2.1, *a*). Se pune problema evaluării forțelor interioare care acționează într-o secțiune oarecare *B*-*B*.

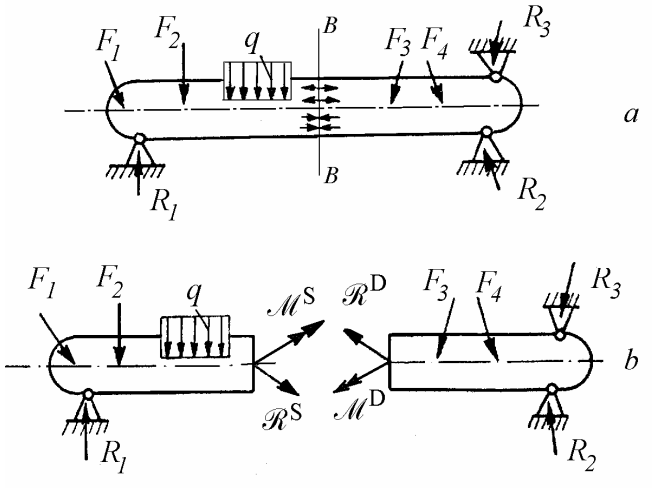


Fig. 2.1

Pentru aceasta se aplică *metoda secționării*. Se secționează bara (imaginar) prin planul *B-B*, se separă cele două părți, se transformă forțele interioare din secțiunea *B-B* în forțe exterioare şi se scriu condițiile de echilibru static pentru fiecare parte de bară.

Se presupune că legătura între particulele situate de o parte şi de alta a planului secțiunii *B-B* se manifestă prin interacțiuni de tip forțe, distribuite pe întreaga suprafață a secțiunii transversale a barei. Forțele din secțiune care reprezintă acțiunea părții din stânga a barei, asupra celei din dreapta, se reduc în centrul de greutate al secțiunii transversale la un torsor compus din forța rezultantă R^D şi cuplul rezultant, de moment M^D (fig. 2.1, *b*).

Conform principiului acțiunii şi reacțiunii, în centrul de greutate al secțiunii barei din stânga acționează forța R^S şi cuplul rezultant, de moment M^S, egale şi de sens contrar cu cele care acționează asupra părții din dreapta.

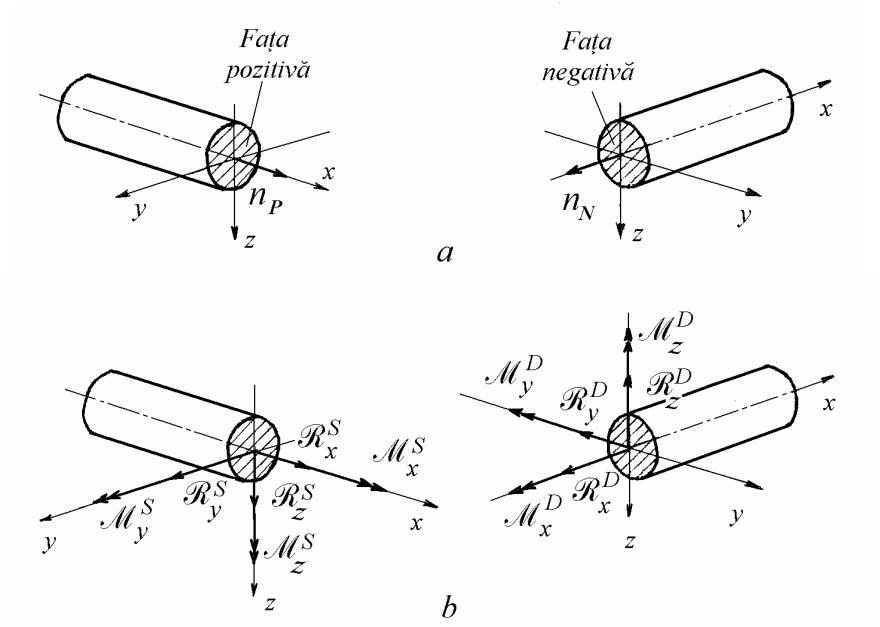


Fig. 2.2

2.2 Convenții de semne

Se va utiliza un sistem de axe drept. Pentru o bară orizontală, axa *x* coincide cu axa barei şi este orientată de la stânga la dreapta, axa *z* este dirijată în jos, iar axa *y* este orizontală, dirijată spre observator (fig. 2.2).

Dacă sensul normalei exterioare la secțiunea transversală coincide cu sensul pozitiv al axei *x*, atunci fața respectivă a barei se numeşte *față pozitivă*. Pe o *față negativă*, sensul normalei exterioare este contrar axei *x* (fig. 2.2, *a*).

În figura 2.2, *b* s-au pus în evidență componentele în lungul axelor de coordonate ale rezultantei forțelor şi momentului rezultant ce acționează în centrul de greutate al secțiunii transversale. S-a adoptat următoarea convenție de semne:

Forțele şi momentele care acționează pe fața *pozitivă* a unui element de bară sunt pozitive atunci când sunt dirijate în sensul *pozitiv* al axelor de coordonate. Forțele şi momentele sunt pozitive pe fața *negativă* atunci când acționează în sensul *negativ* al axelor de coordonate.

2.3 Definiția eforturilor

Cele şase ecuații scalare de echilibru static al părții din stânga a barei se scriu sub forma:

$$\begin{aligned} \Sigma X^{\mathrm{S}} + \mathsf{R}_x^{\mathrm{S}} = 0, \qquad & \Sigma M_x^{\mathrm{S}} + \mathsf{M}_x^{\mathrm{S}} = 0, \\ \Sigma Y^{\mathrm{S}} + \mathsf{R}_y^{\mathrm{S}} = 0, \qquad & \Sigma M_y^{\mathrm{S}} + \mathsf{M}_y^{\mathrm{S}} = 0, \\ \Sigma Z^{\mathrm{S}} + \mathsf{R}_z^{\mathrm{S}} = 0, \qquad & \Sigma M_z^{\mathrm{S}} + \mathsf{M}_z^{\mathrm{S}} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

În ecuațiile (2.1), ΣX^{S} reprezintă suma proiecțiilor pe axa *x* a forțelor ce acționează asupra părții din stânga a barei, iar ΣM_x^{S} este suma momentelor forțelor (şi cuplurilor de forțe) care acționează asupra părții din stânga a barei, calculate față de axa *x*. Sumele față de axele *y* şi *z* se definesc corespunzător.

Conform principiului acțiunii şi reacțiunii, între cele şase componente ale torsorului de reducere a forțelor din secțiune, ce acționează asupra celor două părți ale barei, se stabilesc relațiile:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_x^{\mathrm{D}} = -\mathsf{R}_x^{\mathrm{S}}, \qquad & \mathsf{M}_x^{\mathrm{D}} = -\mathsf{M}_x^{\mathrm{S}}, \\ \mathsf{R}_y^{\mathrm{D}} = -\mathsf{R}_y^{\mathrm{S}}, \qquad & \mathsf{M}_y^{\mathrm{D}} = -\mathsf{M}_y^{\mathrm{S}}, \\ \mathsf{R}_z^{\mathrm{D}} = -\mathsf{R}_z^{\mathrm{S}}, \qquad & \mathsf{M}_z^{\mathrm{D}} = -\mathsf{M}_z^{\mathrm{S}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Din relațiile (2.1) şi (2.2) rezultă

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_x^{\mathrm{D}} = \Sigma X^{\mathrm{S}} = N, \qquad & \mathsf{M}_x^{\mathrm{D}} = \Sigma M_x^{\mathrm{S}} = M_t, \\ \mathsf{R}_y^{\mathrm{D}} = \Sigma Y^{\mathrm{S}} = T_y, \qquad & \mathsf{M}_y^{\mathrm{D}} = \Sigma M_y^{\mathrm{S}} = M_{\mathrm{iy}}, \\ \mathsf{R}_z^{\mathrm{D}} = \Sigma Z^{\mathrm{S}} = T_z, \qquad & \mathsf{M}_z^{\mathrm{D}} = \Sigma M_z^{\mathrm{S}} = M_{\mathrm{iz}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde, în plus, au fost definite şi eforturile secţionale, reprezentate în figura 2.3.

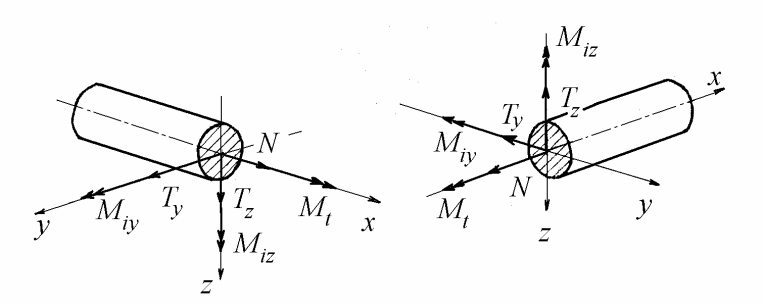


Fig. 2.3

Forţa axială.

Componenta pe axa *x* a rezultantei forţelor interioare se numeşte *forţă axială* şi se notează *N*. Într-o secţiune oarecare, forţa axială este egală cu suma proiecţiilor pe axa *x* a forţelor exterioare care acţionează asupra părţii din bară situate în stânga secţiunii (sau a celor situate în dreapta, cu semn schimbat). Forţa axială *N* produce întinderea sau comprimarea barei (fig. 2.4, *a* şi *b*).

Forţele tăietoare.

Componenta pe axa *z* a rezultantei R^D se numeşte *forţă tăietoare* şi se notează T_z. Ea este egală cu suma proiecţiilor pe axa *z* a forţelor ce acţionează asupra părţii de bară situate la stânga secţiunii (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). La fel pentru componenta $\mathsf{R}_y^D = T_y$. Forţele tăietoare produc forfecare (tăiere) (fig. 2.4, *c*).

Momentul de răsucire.

Componenta pe axa *x* a cuplului M^D se numeşte *moment de răsucire (torsiune)* şi se notează M_t. Într-o secţiune dată, momentul de răsucire este egal cu suma proiecţiilor pe axa *x* a momentelor forţelor şi a cuplurilor ce acţionează asupra părţii din stânga a barei (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). Momentul M_t produce răsucirea (torsionarea) barei (fig. 2.4, *d*).

Momentele încovoietoare.

Componenta pe axa *y* a cuplului M^D se numeşte *moment încovoietor* şi se notează M_{iy}. (La fel $\mathsf{M}_z^D = M_{iz}$). Ea este egală cu suma momentelor forţelor şi a cuplurilor ce acţionează asupra părţii din stânga a barei, calculate în raport cu axa *y* (respectiv *z*). Momentele M_y^D şi M_z^D, notate în general M_i, produc îndoirea (încovoierea) barei (fig. 2.4, *e*).

Rezultă că, utilizând metoda secționării, se pun în evidență componentele torsorului de reducere a forțelor interioare în centrul de greutate al secțiunii transversale, denumite generic *eforturi*.

Se adoptă aceeaşi convenție de semne ca în figura 2.2, *b*. *Pe fața pozitivă, eforturile sunt pozitive când sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate*. *Eforturile care acționează pe fața negativă sunt pozitive atunci când au vectorii dirijați în sensul negativ al axelor de coordonate* (fig. 2.3).

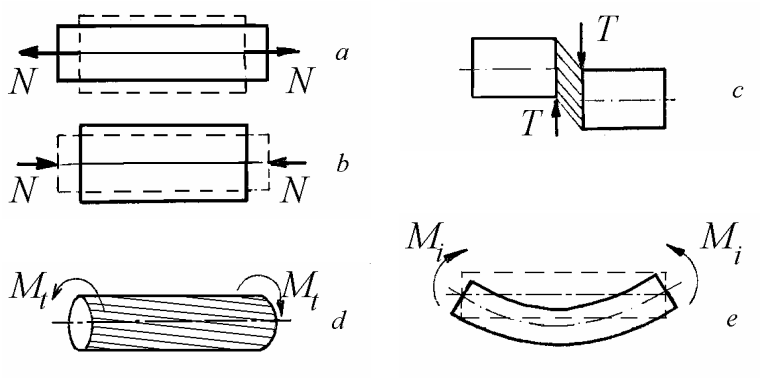


Fig. 2.4

Uneori este util să se coreleze eforturile pozitive cu deformațiile produse de acestea.

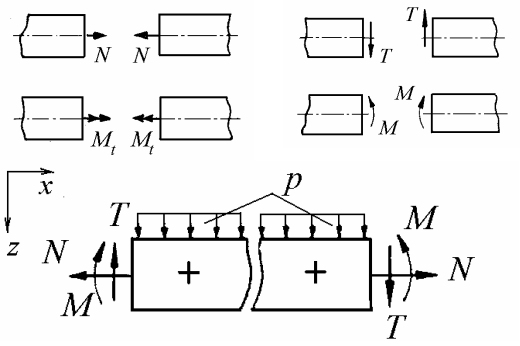


Fig. 2.5

Pentru o bară dreaptă orizontală, solicitată de sarcini transversale verticale, convenția de semne în planul *xOz* este ilustrată în figura 2.5, în care s-a renunțat la indici în notarea eforturilor.

Sarcina *p* pozitivă acționează în jos, acesta fiind şi sensul în care sunt aplicate sarcinile exterioare la majoritatea barelor orizontale.

Momentele încovoietoare M sunt pozitive când produc întinderea părții de jos a barei, deci când forma îndoită a barei are concavitatea în sus (ca în fig. 2.4, *e*).

Forțele tăietoare T sunt pozitive când produc o lunecare similară unei rotiri în sensul orar (ca în fig. 2.4, *c*).

Forțele axiale N se consideră pozitive atunci când produc întindere (fig. 2.4, *a*) şi negative, atunci când produc compresiune (fig. 2.4, *b*).

Momentele de răsucire se vor considera pozitive atunci când vectorul moment este dirijat la fel ca vectorul forțelor axiale pozitive (fig. 2.4, *d*).

Trebuie remarcat că aceste reguli nu mai sunt aplicabile pentru bara solicitată de sarcini orizontale, deci în planul *xOy*.

Relațiile (2.3) exprimă dependența eforturilor secționale de sarcinile exterioare aplicate barei. În Rezistența materialelor se calculează variația eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma *diagramelor de eforturi*.

2.4 Relații diferențiale de echilibru la bare drepte

Fie un element infinitezimal de lungime dx, detaşat dintr-o bară solicitată prin sarcini verticale, perpendiculare pe axă, în planul *xOz* (fig. 2.6). Lungimea dx fiind foarte mică, sarcina p se consideră uniform distribuită. În secțiunile din capete acționează eforturile indicate în figură, reprezentând acțiunea părților de bară adiacente, asupra elementului respectiv.

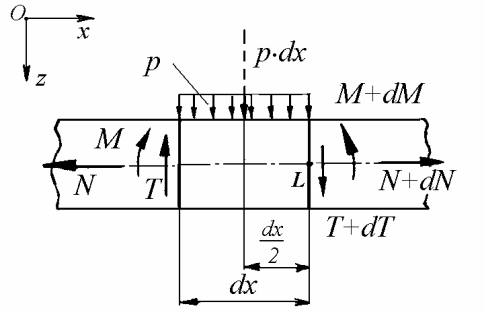


Fig. 2.6

Ecuațiile de echilibru ale forțelor se scriu :

$$N + \mathrm{d}N - N = 0;$$

$$T - p \cdot \mathrm{d}x - (T + \mathrm{d}T) = 0.$$

Ecuația de echilibru a momentelor față de punctul *L* este

$$M + T \cdot \mathrm{d}x - p \cdot \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}x}{2} - (M + \mathrm{d}M) = 0.$$

După reduceri şi neglijarea infiniților mici de ordin superior, ecuațiile de mai sus, valabile în planul *xOz*, se scriu :

$$\mathrm{d}N = 0; \qquad -p \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}T = 0; \qquad T \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}M = 0$$

sau

$$N = \text{const.};$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -p; \tag{2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T. \tag{2.5}$$

Din *relațiile diferențiale de echilibru* (2.4) şi (2.5), denumite şi *relații diferențiale între eforturi şi sarcini*, prin eliminarea lui *T*, se obține :

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -p. \tag{2.6}$$

Pe baza acestor relații se stabilesc reguli general valabile, utile la construcția diagramelor de eforturi la bare drepte:

a) Pe porțiunile de bară nesolicitate ($p = 0$), forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoietor variază liniar.

b) Pe porțiunile de bară solicitate cu sarcini *uniform* distribuite (p = const.), forța tăietoare variază liniar, iar momentul încovoietor variază parabolic.

c) Diagrama forțelor tăietoare are o discontinuitate (salt) în dreptul unei forțe concentrate, iar diagrama momentelor încovoietoare are o discontinuitate în dreptul unui cuplu concentrat.

d) Diagrama momentelor încovoietoare are valori extreme (maxim sau minim) în secțiunile în care forța tăietoare se anulează.

e) Pe porțiunile de bară unde forța tăietoare este pozitivă (negativă) momentul încovoietor creşte (scade).

f) Dacă sarcina distribuită este pozitivă (negativă), forța tăietoare scade (creşte) iar diagrama momentelor încovoietoare are concavitatea în sus (în jos).

Din relația (2.5) se obține

$$\mathrm{d}M = T \cdot \mathrm{d}x, \qquad M = \int T \cdot \mathrm{d}x + C,$$

unde C este o constantă de integrare, în general diferită de zero dacă asupra barei acționează cupluri concentrate. Rezultă că

g) Într-o secțiune dată, momentul încovoietor este egal cu aria diagramei forțelor tăietoare calculată de la capătul din stânga al barei până la ordonata din secțiunea respectivă (sau cea calculată de la capătul din drepta, cu semn schimbat), dacă pe intervalul respectiv nu există cupluri concentrate ($C = 0$).

2.5 Diagrame de eforturi la bare drepte

Pentru construcția diagramelor de eforturi sunt necesare: 1) o convenție de semne privind sensul pozitiv al eforturilor; 2) o convenție de semne privind sensul pozitiv al axelor diagramelor de eforturi şi 3) relațiile diferențiale de echilibru.

Convenția de semne pentru eforturi rezultă din figura 2.3. Diagramele forțelor axiale şi forțelor tăietoare se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în sus, în timp ce diagrama momentelor încovoietoare se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în jos (pe partea întinsă a barei). Această convenție face ca diagrama momentelor încovoietoare să aibă o alură asemănătoare formei deformate a barei. Diagrama momentelor de torsiune se va reprezenta cu momentele pozitive în sus.

Pentru început, se vor considera bare drepte, solicitate de forțe şi sarcini distribuite cuprinse într-un plan vertical care conține axa barei, respectiv de cupluri având vectorul moment perpendicular pe acest plan.

Trebuie amintit că, în Rezistența materialelor, forțele şi momentele exterioare sunt *vectori legați* de punctul de aplicare, spre deosebire de Mecanica solidelor rigide, în care forțele sunt *vectori alunecători* iar momentele sunt considerate *vectori liberi*.

De asemenea, trebuie avut în vedere că *eforturile secționale* sunt mărimi convenționale, introduse pentru simplificarea calculelor. În realitate, forțele interioare se exercită pe toată suprafața secțiunii transversale, nu numai în centrul de greutate al acesteia, fiind distribuite continuu, ceea ce impune introducerea altor mărimi fizice, *tensiunile*, care să caracterizeze interacțiunea dintre particulele unui corp deformabil solicitat mecanic.

2.5.1 Diagrame de forțe tăietoare şi momente încovoietoare

a) Grindă simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată (fig. 2.7)

Din ecuațiile de echilibru rezultă reacțiunile :

$$V_1 = \frac{F\,b}{\ell}; \qquad V_2 = \frac{F\,a}{\ell}.$$

Forța tăietoare este constantă pe cele două porțiuni

$$T_{1-3} = V_1 = \frac{F\,b}{\ell}; \qquad T_{3-2} = V_1 - F = -\frac{F\,a}{\ell}$$

În secțiunea *3*, în diagrama *T* apare un salt egal cu *F*.

Momentul încovoietor are valorile :

$$M_1 = 0, \qquad M_3 = \frac{F\,b}{\ell}\,a, \qquad M_2 = 0$$

şi variază liniar pe cele două porțiuni :

$$M_{1-3} = V_1 \cdot x = \frac{F\,b}{\ell}\,x\,, \qquad M_{3-2} = V_2 \cdot x' = \frac{F\,a}{\ell}\,x'\,.$$

Valoarea maximă $M_{max} = \dfrac{F\,a\,b}{\ell}$ apare în secțiunea *3* unde diagrama forței tăietoare intersectează axa absciselor.

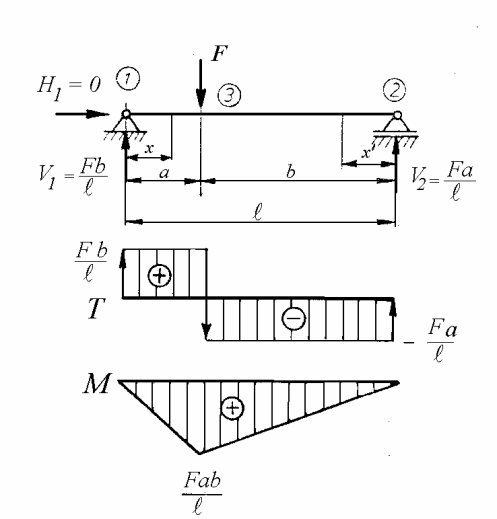


Fig. 2.7

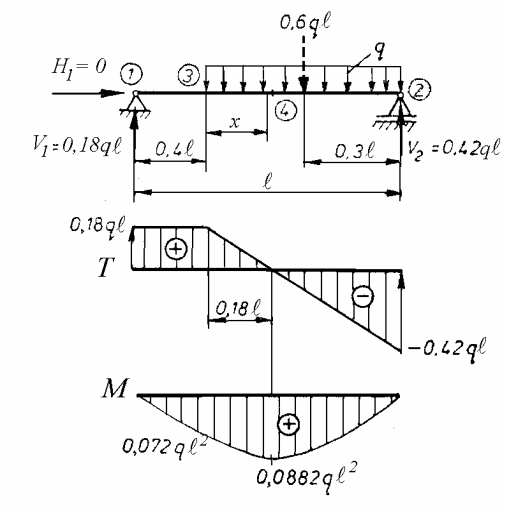


Fig. 2.8

b) Grindă simplu rezemată, încărcată parțial cu sarcină uniform distribuită (fig.2.8)

Se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forță concentrată $0{,}6\,q\,\ell$ aplicată la mijlocul porțiunii 3-2. Din ecuațiile de echilibru se calculează reacțiunile :

$$V_1 = 0{,}18\,q\ell; \qquad V_2 = 0{,}42\,q\ell\,.$$

În punctul *1*, forța tăietoare este

$$T_1 = 0{,}18\, q\, \ell$$

fiind constantă pe porțiunea *1-3* :

$$T_{1-3} = 0{,}18\, q\, \ell$$

Pe porțiunea *3-2*, într-o secțiune oarecare *x*, forța tăietoare este

$$T_{3-2} = T_x = 0{,}18\, q\, \ell - q\, x\,.$$

În punctul *2*,

$$T_2 = 0{,}18\, q\, \ell - 0{,}6\, q\, \ell = -0{,}42\, q\, \ell\,.$$

Forța tăietoare se anulează ($T_{3-2} = 0$) în punctul *4*, situat la distanța $x = 0{,}18\ell$ față de secțiunea *3*.

Momentul încovoietor variază liniar pe porțiunea *1-3*, având la capete valorile :

$$M_1 = 0; \qquad M_3 = V_1 \cdot 0{,}4\ell = 0{,}18\, q\, \ell \cdot 0{,}4\ell = 0{,}072\, q\, \ell^2\,.$$

Pe porțiunea *3-2*, momentul încovoietor variază parabolic, în secțiunea *x* având expresia

$$M_x = V_1\left(0{,}4\ell + x\right) - \frac{qx^2}{2} = 0{,}18\, q\ell\left(0{,}4\ell + x\right) - \frac{qx^2}{2}\,.$$

În secțiunea *4* se obține valoarea maximă

$$M_{max} = 0{,}18\, q\ell \cdot 0{,}58\ell - \frac{q}{2}\left(0{,}18\ell\right)^2 = 0{,}0882\, q\, \ell^2\,.$$

c) Grindă simplu rezemată, solicitată de un cuplu concentrat (fig. 2.9)

Reacțiunile sunt

$$V_1 = -V_2 = \frac{\mathsf{M}}{\ell}\,.$$

Forța tăietoare este constantă în lungul barei

$$T_{1-2} = \frac{\mathsf{M}}{\ell}\,.$$

Momentul încovoietor variază liniar :

$$M_{1-3} = \frac{\mathsf{M}}{\ell}\, x; \qquad M_{3-2} = -\frac{\mathsf{M}}{\ell}\, x'\,.$$

În punctul *3* apare un salt egal cu M , valorile în secțiunile adiacente fiind

$$M_{3-\varepsilon} = \frac{\mathsf{M}}{\ell}\, a; \qquad M_{3+\varepsilon} = -\frac{\mathsf{M}}{\ell}\, b\,.$$

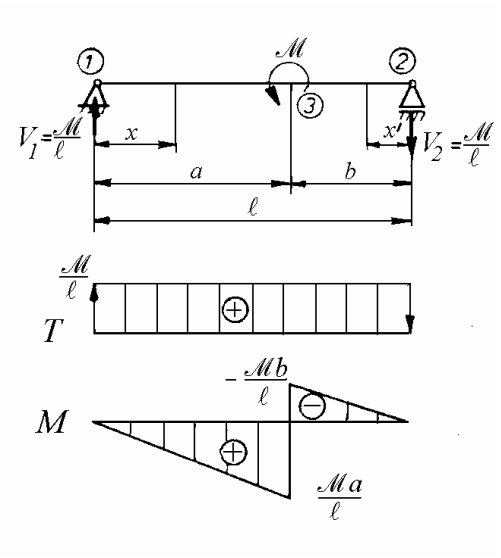


Fig. 2.9

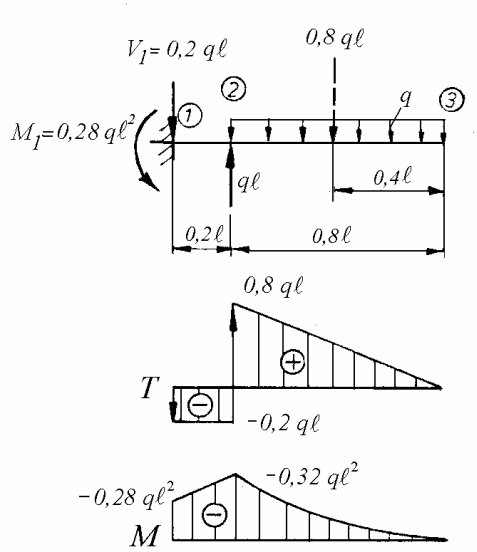


Fig. 2.10

d) Grindă în consolă încărcată cu forță concentrată şi sarcină distribuită (fig. 2.10)

Din ecuația de proiecții pe verticală a forțelor se obține reacțiunea $V_1 = 0{,}2\, q\, \ell$. Din ecuația de momente față de punctul *1* se obține momentul din încastrare $M_1 = 0{,}28\, q\, \ell^2$.

Forța tăietoare este constantă pe porțiunea *1-2* :

$$T_{1-2} = -0{,}2\, q\, \ell$$

şi are un salt egal cu $q\, \ell$ în secțiunea *2*, scăzând apoi liniar la zero.

Momentul încovoietor în încastrare este $M_1 = -0{,}28\, q\, \ell^2$, pe porțiunea *1-2* variază liniar până la $M_2 = -0{,}32\, q\, \ell^2$, scăzând apoi parabolic la zero în punctul *3* unde diagrama momentelot încovoietoare are pantă nulă deoarece forța tăietoare este nulă.

e) Grindă simplu rezemată, încărcată cu sarcină triungiulară (fig. 2.11)

Pentru calculul reacțiunilor, se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forță concentrată $\frac{q\,\ell}{2}$, aplicată la distanța $\frac{2\,\ell}{3}$ de reazemul din stânga (în centrul de greutate al triunghiului). Se obțin valorile $V_1 = \frac{q\,\ell}{6},\ V_2 = \frac{q\,\ell}{3}$.

În secțiunea *x*, intensitatea sarcinii distribuite este :

$$q_x = \frac{x}{\ell}q\,,$$

forța tăietoare este

$$T_x = \frac{q\,\ell}{6} - \frac{1}{2}q_x x = \frac{q\,\ell}{6} - \frac{q\,x^2}{2\,\ell}$$

iar momentul încovoietor este

$$M_x = \frac{q\,\ell}{6}x - \frac{1}{2}q_x x\frac{x}{3} = \frac{q\,\ell\,x}{6} - \frac{q\,x^3}{6\,\ell}\,.$$

Anulând expresia forței tăietoare, se obține abscisa $x = \ell/\sqrt{3}$ în care momentul încovoietor are valoarea maximă $M_{max} = \frac{q\,\ell^2}{9\sqrt{3}}$.

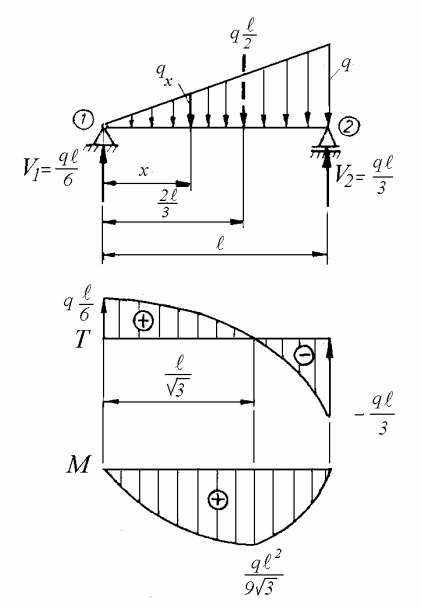


Fig. 2.11

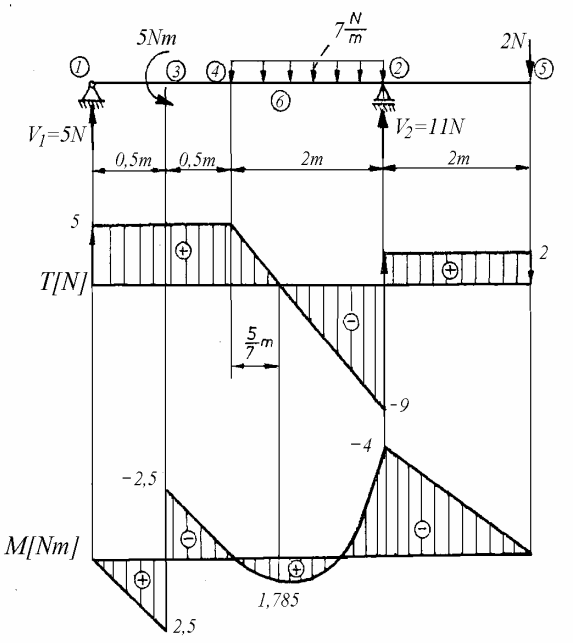
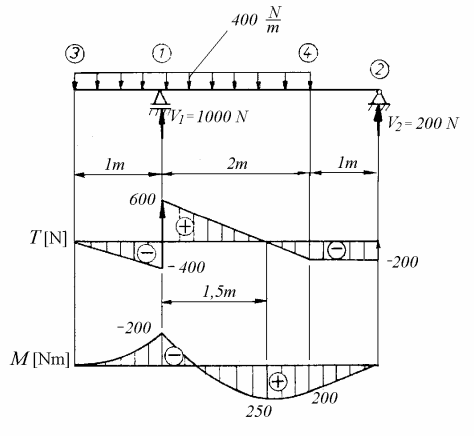
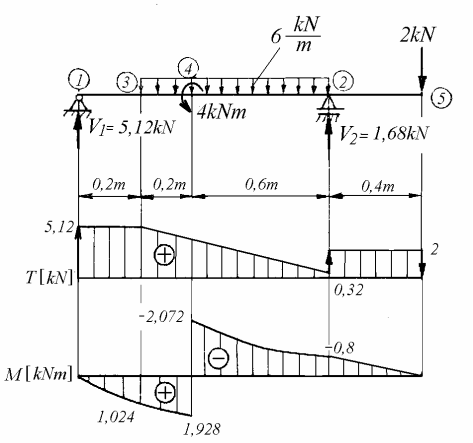


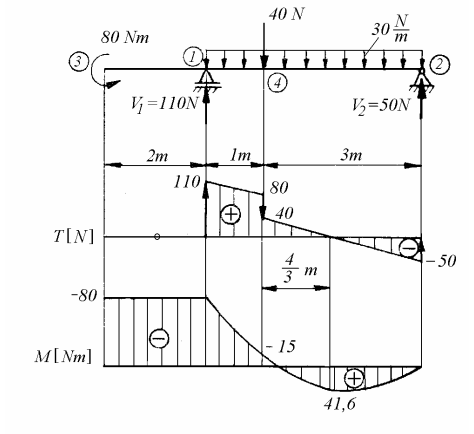
Fig. 2.12



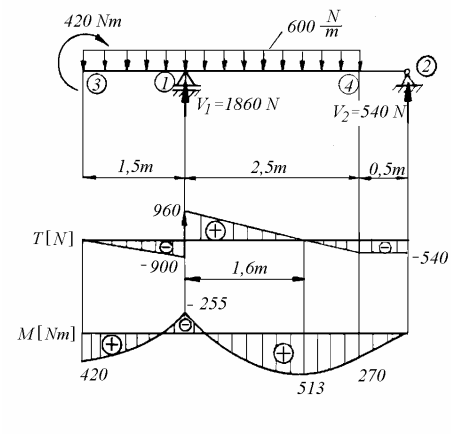
a



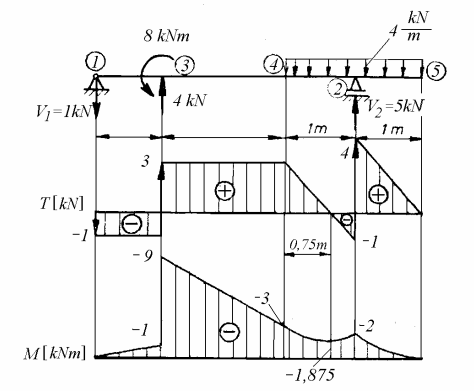
b



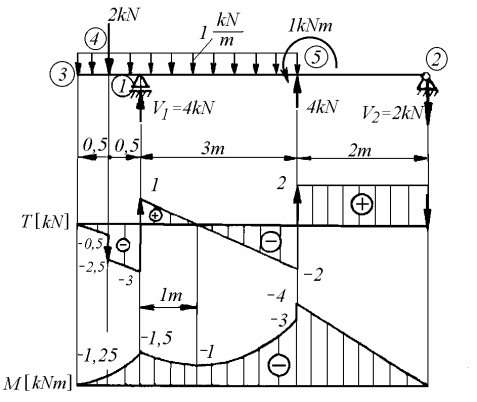
c



d



e



f

Fig. 2.13

Exemplul 2.1

Se cere să se construiască diagramele *T* şi *M* la grinda din figura 2.12.

Rezolvare

Reacțiunile sunt : $V_1 = 5$ N; $V_2 = 11$ N.

Forțele tăietoare au valorile: $T_{1-4} = 5$ N; $T_{4-2} = (5 - 7x)$ N; $T_{2-5} = 2$ N.

Pentru $T_{4-2} = 0$ se obține $x_6 = \frac{5}{7}$ m.

Momentele încovoietoare au valorile : $M_{3-\varepsilon} = 2{,}5$ Nm; $M_{3+\varepsilon} = -2{,}5$ Nm; $M_2 = -4$ Nm; $M_6 = 1{,}785$ Nm.

Rezultă $|M_{max}| = 4$ Nm.

Exemple de calcul

În figura 2.13 se dau şase exemple de grinzi la care s-au construit diagramele forțelor tăietoare şi ale momentelor încovoietoare.

2.5.2 Diagrama forțelor axiale

Pentru bara din figura 2.14, *a*, solicitată de forțe dirijate în lungul axei barei, se calculează forța axială pe fiecare porțiune :

$$N_{1-2} = -2F; \quad N_{2-3} = F; \quad N_{3-4} = 2F; \quad N_{4-5} = -F$$

şi se construieşte diagrama de eforturi din figura 2.14, *b* ținând cont de convențiile de semne.

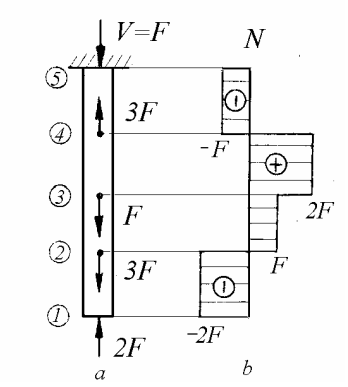


Fig. 2.14

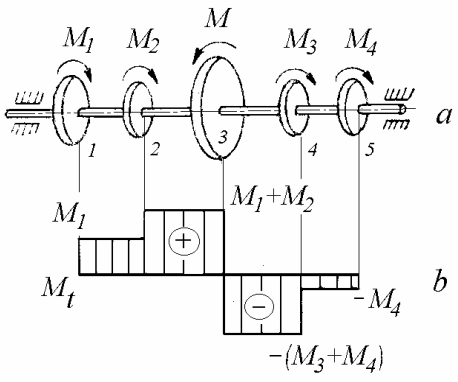


Fig. 2.15

2.5.3 Diagrama momentelor de răsucire

Pentru bara din figura 2.15, *a*, solicitată de momentul activ M şi de momentele rezistente $M_1,...,M_4$, ecuaţia de echilibru a momentelor este

$$M_1 + M_2 - M + M_3 + M_4 = 0.$$

Se calculează momentul de torsiune pe fiecare porţiune de bară:

$$M_{t\,1-2} = M_1, \qquad M_{t\,2-3} = M_1 + M_2,$$
$$M_{t\,3-4} = M_1 + M_2 - M = -\left(M_3 + M_4\right), \qquad M_{t\,4-5} = -M_4,$$

apoi se reprezintă grafic faţă de o linie de referinţă paralelă cu axa barei, ca în figura 2.15, *b*, ţinând cont de convenţiile de semne.

2.6 Diagrame de eforturi la bare cotite plane

Barele cotite şi cadrele sunt formate din mai multe bare drepte, legate prin noduri rigide. Nodurile rigide realizează legături care menţin unghiul dintre axele barelor concurente în nod şi după aplicarea solicitării.

Pentru construcţia diagramelor de eforturi trebuie precizat, pentru fiecare bară componentă, sensul pozitiv al axei x. În cele ce urmează se consideră bare cotite solicitate de sarcini coplanare.

Fie bara din figura 2.16. Se calculează reacţiunile. Din ecuaţia de proiecţii pe verticală a forţelor se obţine $V_1 = 2\,q\,\ell$. Se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forţă orizontală $3\,q\,\ell$ aplicată la mijlocul barei *1-3*. Ecuaţia de momente faţă de punctul *1* se scrie

$$3\,q\,\ell\,\frac{3\ell}{2} + 2\,q\,\ell\cdot\ell - H_2\cdot 2\,\ell = 0$$

Rezultă $H_2 = \frac{13}{4}q\,\ell$. Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală a forţelor se obţine $H_1 = \frac{q\,\ell}{4}$.

Forţele axiale au valorile :

$$N_{1-3} = -2\,q\,\ell, \qquad N_{3-5} = -\frac{13}{4}\,q\,\ell, \qquad N_{5-2} = 0\,.$$

Cu aceste valori se construieşte diagrama din figura 2.16, *b*.

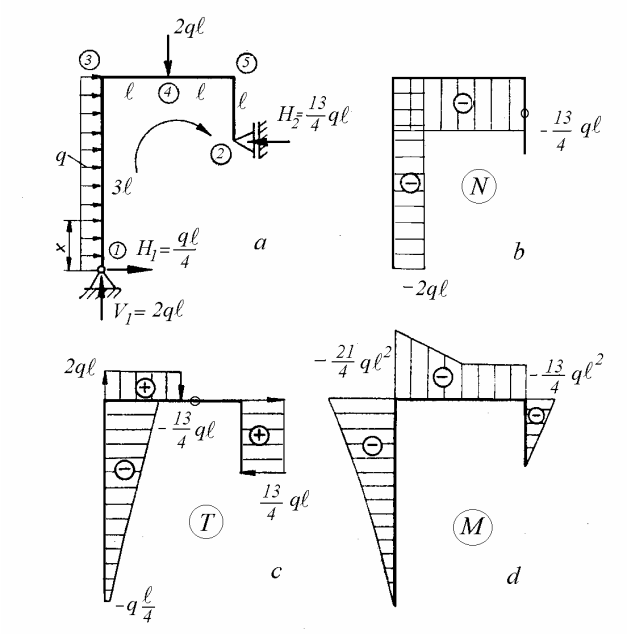


Fig. 2.16

Forțele tăietoare sunt :

$$T_1 = -\frac{q\,\ell}{4}, \quad T_{1-3} = -\frac{q\,\ell}{4} - q\,x, \quad T_{3-\varepsilon} = -\frac{13}{4}q\,\ell,$$

$$T_{3+\varepsilon} = 2\,q\,\ell, \quad T_{3-4} = 2\,q\,\ell, \quad T_{4-5} = 0, \quad T_{5-2} = \frac{13}{4}q\,\ell\,.$$

Cu aceste valori se construieşte diagrama din figura 2.16, *c*.

Momentele încovoietoare au valorile :

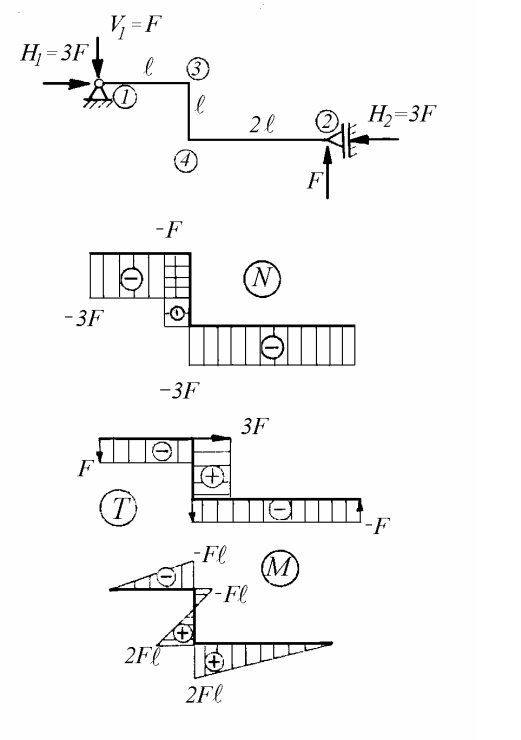
$$M_1 = 0, \quad M_3 = -\frac{21}{4}q\,\ell^2, \quad M_4 = M_5 = -\frac{13}{4}q\,\ell^2, \quad M_2 = 0\,,$$

cu ajutorul cărora se construieşte diagrama din figura 2.16, *d*.

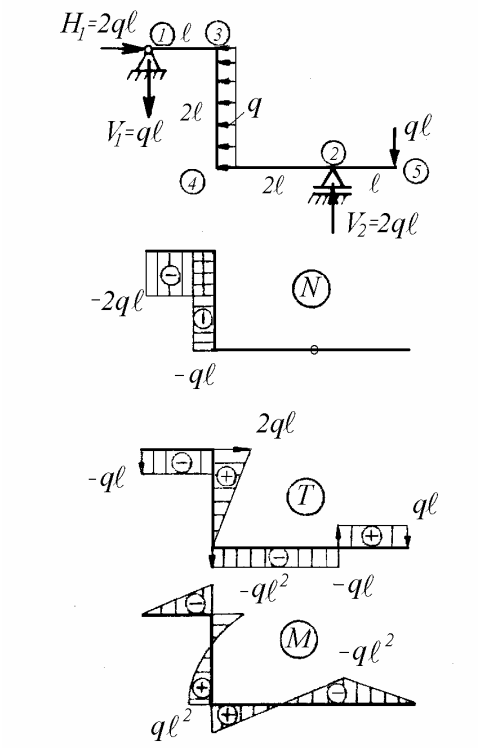
Se observă că la colțurile barei cotite, valorile forțelor axiale şi forțelor tăietoare se modifică la trecerea de la o bară la cealaltă, deoarece aceste eforturi depind de direcție. În schimb, valorile momentelor încovoietoare sunt aceleaşi pentru cele două bare concurente într-un nod, deoarece valoarea momentului încovoietor depinde numai de punctul în care se calculează şi nu de direcția barei.

Exemple de calcul

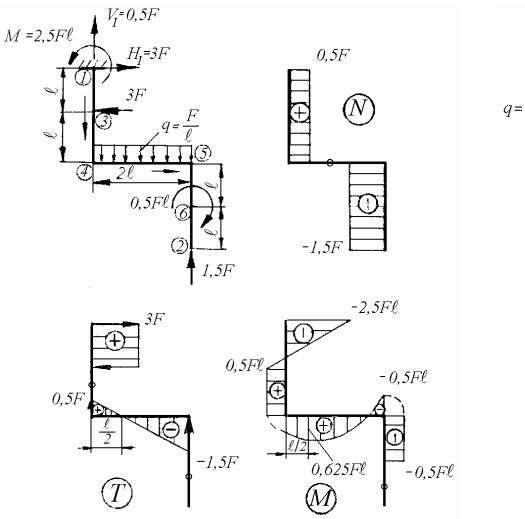
În figura 2.17 se dau patru exemple de grinzi cotite la care s-au construit diagramele forțelor axiale, forțelor tăietoare şi ale momentelor încovoietoare.


V1 = F
H1 = 3F
ℓ
ℓ
2 ℓ
H2=3F
F
-F
-3F
-3F
3F
F
-F
-Fℓ
-Fℓ
2Fℓ
2Fℓ

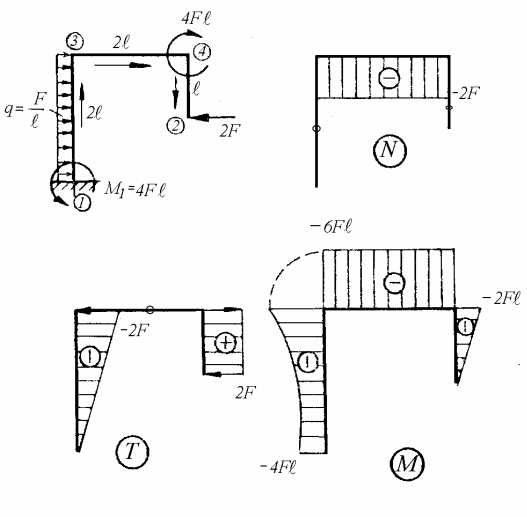
a


H1=2qℓ
ℓ
V1=qℓ
2ℓ
q
qℓ
2ℓ
ℓ
V2=2qℓ
-2qℓ
-qℓ
2qℓ
-qℓ
qℓ
-qℓ2
-qℓ
-qℓ2
qℓ2

b


M =2,5Fℓ
V1=0,5F
H1=3F
3F
q= F/ℓ
2ℓ
0,5Fℓ
1,5F
0,5F
-1,5F
3F
0,5F
-1,5F
-2,5Fℓ
0,5Fℓ
-0,5Fℓ
0,625Fℓ
-0,5Fℓ

c


4Fℓ
2ℓ
q= F/ℓ
2ℓ
ℓ
2F
M1=4Fℓ
-2F
-6Fℓ
-2Fℓ
-2F
2F
-4Fℓ

d

Fig. 2.17

2.7 Diagrame de eforturi la bare cotite spațiale

La bare cotite spațiale se construiesc diagrame de eforturi față de o linie de referință la fel ca bara. Pe fiecare porțiune se defineşte orientarea axei *x*, care poate fi arbitrară, deşi se preferă continuitatea sensului, la schimbarea direcției.

În continuare se vor construi patru diagrame de eforturi *N*, *T*, M_i şi M_t, deci diagramele forțelor tăietoare T_y, T_z şi ale momentelor încovoietoare M_{iy}, M_{iz} vor fi desenate în diagrama *T*, respectiv M_i. Funcție de tipul aplicației, se pot construi fie doar diagramele M_i şi M_t, fie diagramele *N* şi M_i.

Relațiile diferențiale de echilibru (2.4), (2.5) în planul *xOz,* scrise cu indici, au forma

$$\frac{dT_z}{dx} = -p_z\,, \qquad \frac{dM_y}{dx} = T_z\,. \tag{2.7}$$

În planul *xOy*, relațiile diferențiale de echilibru se scriu

$$\frac{dT_y}{dx} = -p_y\,, \qquad \frac{dM_z}{dx} = -T_y\,. \tag{2.8}$$

Rezultă că în planul *xOy*, regula de semne şi reprezentarea geometrică pentru forțe tăietoare este aceeaşi ca în planul *xOz*, în schimb, momentele încovoietoare au semn contrar, deci diagrama momentelor încovoietoare va avea aceeaşi formă, dar cu semne schimbate.

Pentru bare încastrate la un capăt, este recomandabil să se înceapă calculul de la cătul liber; astfel nu mai este necesar calculul reacțiunilor. Prima porțiune dreaptă se consideră încastrată în restul sistemului şi se construiesc diagramele de eforturi aferente. Pentru construcția diagramelor de eforturi pe următoarea porțiune dreaptă, se reduc forțele de pe porțiunea anterioară în capătul adiacent al barei şi se consideră bara încastrată la celălalt capăt (se "rigidizează" restul sistemului).

Deobicei se precizează sensul axelor *y* şi *z* pentru fiecare porțiune dreaptă. În continuare, pentru simplificarea expunerii, nu se face această precizare. Pentru claritate, la diagrama momentelor de răsucire s-a inversat convenția de semne.

Exemplul 2.2

Fie bara din figura 2.18, *a*, la care s-a precizat sensul axei *x* pe fiecare porțiune.

Se consideră porțiunea *2-3*, încastrată în *2* (fig. 2.18, *b*). Se calculează eforturile şi se reprezintă pe porțiunea respectivă din diagramele din fig. 2.18, *d, e, f, g:* $N_{2-3} = 4\,\text{kN}, T_{2-3} = 2\,\text{kN}$ (în plan vertical), $M_2 = -1{,}6\,\text{kNm}$ (în plan vertical), $M_{t2-3} = 0$.

Se secționează bara în *2*. Se reduc forțele aplicate în *3* în punctul *2* al barei *1-2* (fig. 2.18, *c*) încastrată în *1*. Se calculează eforturile $N_{1-2} = 0$, $M_{t1-2} = 1{,}6\,\text{kNm}$, forțele tăietoare şi momentele încovoietoare în planul vertical, produse de forța 2 kN, apoi cele din planul orizontal, produse de forța 4 kN. Se obțin diagramele din figurile 2.18, *d, e, f, g*.

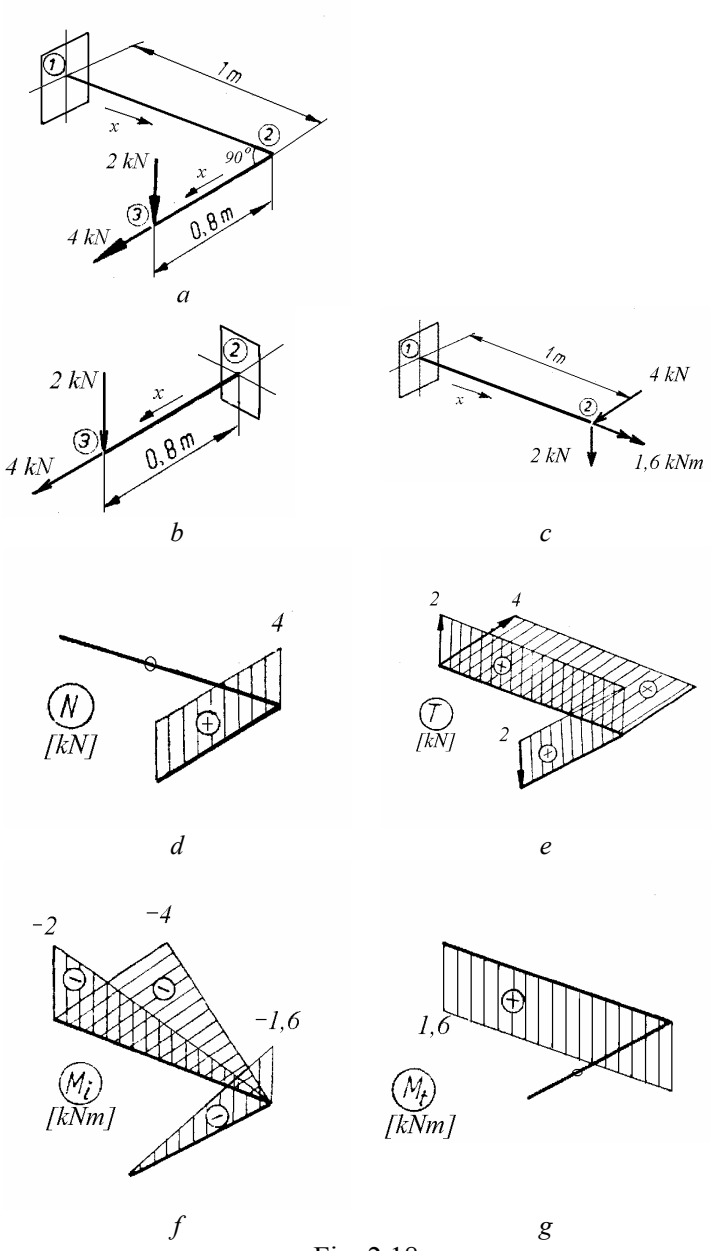


Fig. 2.18

Exemplul 2.3

Fie bara din figura 2.19, *a*, solicitată în punctul *4* de forța *F* şi de cuplul concentrat 2*Fa*. Se alege sensul pozitiv al axei *x* pentru fiecare porțiune.

Se consideră porțiunea *3-4*, încastrată în *3* (fig. 2.19, *b*) şi se calculează eforturile aferente.

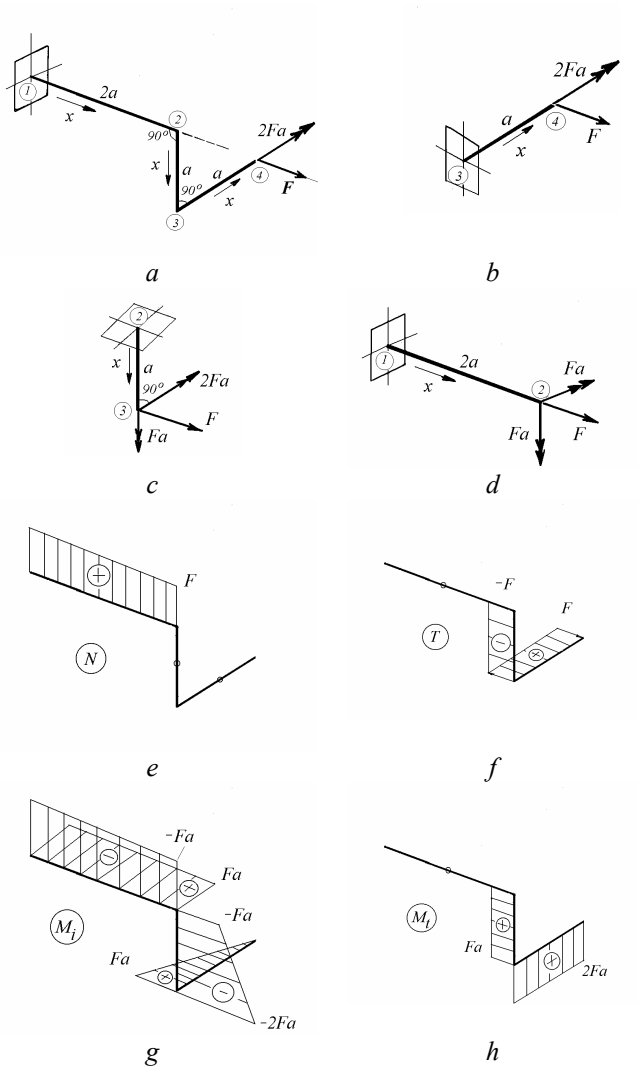


Fig. 2.19

Se secționează sistemul în *3*, se îndepărtează bara *3-4*, se reduc forțele ce acționează asupra barei *3-4* în punctul *3*, capătul barei *2-3* (fig. 2.19, *c*) şi se calculeaza eforturile în bara *2-3*, încastrată în *2*. Se construiesc diagramele de eforturi pentru bara *2-3*.

Se secționează sistemul în *2*, se îndepărtează bara *2-3*, se reduc forțele care acționează asupra barei *2-3* (din fig. 2.19, *c*) în punctul *2*, capătul barei *1-2* (fig. 2.19, *d*) şi se calculează eforturile în bara *1-2*, încastrată în *1*. Diagramele de eforturi sunt prezentate în figurile 2.19, *e, f, g, h*.

2.8 Relații diferențiale de echilibru la bare curbe plane

Se consideră bare curbe plane, solicitate prin forțe coplanare. Relațiile diferențiale de echilibru diferă după cum momentele încovoietoare pozitive măresc sau micşorează curbura barei.

Cazul I. *Momentele încovoietoare pozitive micşorează curbura barei*

Fie un element infinitezimal de lungime $BC = \mathrm{d}s$ şi rază R, obținut prin secționarea unei bare curbe în B şi C (fig. 2.20), solicitat de o sarcină distribuită p în direcție radială (înlocuită prin forța concentrată $p\,\mathrm{d}s$ aplicată la mijlocul elementului BC). Pentru echilibru, în cele două secțiuni de la capete s-au introdus eforturile N, T, M, respectiv $N+\mathrm{d}N$, $T+\mathrm{d}T$, $M+\mathrm{d}M$. În acest caz, momentele încovoietoare pozitive măresc raza de curbură a barei.

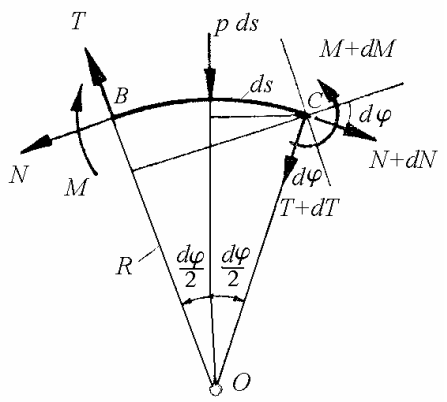


Fig. 2.20

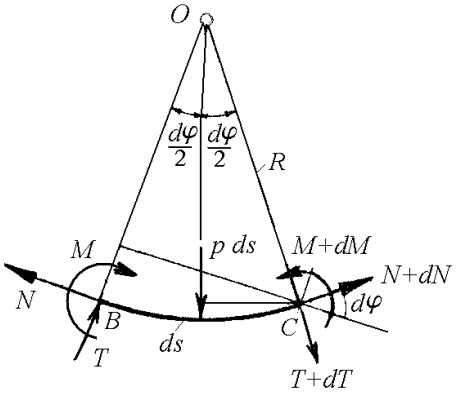


Fig. 2.21

Se scriu ecuațiile de echilibru static: ecuațiile de proiecții pe direcțiile forțelor N, T şi ecuația de momente față de punctul C :

$$N-(N+\mathrm{d}N)\cos\mathrm{d}\varphi+(T+\mathrm{d}T)\sin\mathrm{d}\varphi+p\,\mathrm{d}s\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}=0,$$

$$T-(T+\mathrm{d}T)\cos\mathrm{d}\varphi-(N+\mathrm{d}N)\sin\mathrm{d}\varphi-p\,\mathrm{d}s\cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}=0,$$

$$M-\left(M+\mathrm{d}M\right)-N\,R\left(1-\cos\mathrm{d}\varphi\right)+T\,R\sin\mathrm{d}\varphi-p\,\mathrm{d}s\,R\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}=0.$$

Înlocuind $\sin\mathrm{d}\varphi\cong\mathrm{d}\varphi$, $\cos\mathrm{d}\varphi\cong 1$, făcând reducerile necesare şi neglijând infiniţii mici de ordin superior, se obţine

$$-\mathrm{d}N+T\,\mathrm{d}\varphi=0,$$

$$-\mathrm{d}T-N\,\mathrm{d}\varphi-p\,\mathrm{d}s=0,$$

$$-\mathrm{d}M+T\,R\,\mathrm{d}\varphi=0.$$

Înlocuind $\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\varphi$, rezultă ecuaţiile diferenţiale de echilibru

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}=\frac{T}{R},\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=-\frac{N}{R}-p,\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}=T. \tag{2.9}$$

La bare în formă de arc de cerc (R=const.), relaţiile (2.9) devin

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varphi}=T,\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi}=-N-pR,\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi}=TR. \tag{2.10}$$

Pentru $R\to\infty$, din ecuaţiile (2.9) se obţin relaţiile diferenţiale de echilibru (2.4) şi (2.5) de la bare drepte.

Cazul II. *Momentele încovoietoare pozitive măresc curbura barei*

Se scriu ecuaţiile de echilibru pentru elementul infinitezimal din Fig. 2.21, la care momentele încovoietoare pozitive micşorează raza de curbură a barei. Urmând operaţiile de mai sus se obţine

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}=-\frac{T}{R},\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=\frac{N}{R}-p,\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}=T. \tag{2.11}$$

La bare în formă de arc de cerc ($R=const.$), relaţiile (2.11) devin

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varphi}=-T,\qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi}=N-pR,\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi}=TR. \tag{2.12}$$

Pentru $R\to\infty$, din ecuaţiile (2.11) se obţin relaţiile diferenţiale de echilibru (2.4) şi (2.5) de la bare drepte.

2.9 Diagrame de eforturi la bare curbe plane

Se consideră bare în formă de arc de cerc, cu raza *R,* solicitate de forţe coplanare. Eforturile se definesc prin metoda secţionării.

Forța axială N este egală cu suma proiecțiilor pe tangenta la axa barei a forțelor care acționează de o parte a secțiunii considerate. Forța tăietoare T se calculează ca suma proiecțiilor pe normala la axa barei a forțelor ce acționează de o parte a secțiunii. Momentul încovoietor M este egal cu suma momentelor forțelor (şi a cuplurilor concentrate) ce acționează de o parte a secțiunii, față de secțiune.

Convențiile de semne pentru eforturi coincid cu cele stabilite la bare drepte. Drept linie de referință pentru reprezentarea eforturilor se utilizează axa barei curbe. Diagramele se construiesc astfel încât ordonatele să fie orientate pe direcția razei (normale la axa barei). Funcție de forma barei, eforturile pozitive se reprezintă pe partea concavă sau convexă a barei, pentru a se obține o diagramă cât mai clară.

Exemplul 2.4

Se vor construi diagramele de eforturi la bara semicirculară din fig. 2.22, *a*.

Se calculează reacțiunile

$$H_1 = F, \quad V_1 = F/2, \quad V_2 = F/2.$$

Se scriu expresiile analitice ale eforturilor într-o secțiune oarecare :

$$N_{13} = F \sin\varphi + \frac{F}{2}\cos\varphi, \qquad T_{13} = F\cos\varphi - \frac{F}{2}\sin\varphi,$$

$$M_{13} = F\,R\sin\varphi - \frac{F}{2}R\left(1 - \cos\varphi\right),$$

$$N_{32} = -\frac{F}{2}\cos\alpha, \qquad T_{32} = -\frac{F}{2}\sin\alpha, \qquad M_{32} = \frac{F}{2}R\left(1 - \cos\alpha\right).$$

Se calculează valorile eforturilor în secțiunile *1*, *2* şi *3* :

$$N_1 = \frac{F}{2}, \qquad T_1 = F, \qquad M_1 = 0,$$

$$N_2 = -\frac{F}{2}, \qquad T_2 = 0, \qquad M_2 = 0,$$

$$N_{3-\varepsilon} = F, \qquad N_{3+\varepsilon} = 0, \qquad T_3 = -\frac{F}{2}, \qquad M_3 = \frac{F\,R}{2}.$$

Se trasează mai întâi, aproximativ, diagramele N, T, M, unind cu linii continue ordonatele punctelor obținute pe baza valorilor de mai sus.

Se observă că $T_{13} = 0$ la $\varphi = \operatorname{arctg} 2 = 63°30'$. În această secțiune se calculează $N_{max} = 1{,}118\,F$ şi $M_{max} = 0{,}618\,F\,R$, după care se corectează diagramele (fig. 2.22, *b*, *c*, *d*).

Pentru claritate, forțele tăietoare pozitive apar pe partea concavă a barei, iar momentele încovoietoare pozitive apar pe partea convexă a barei.

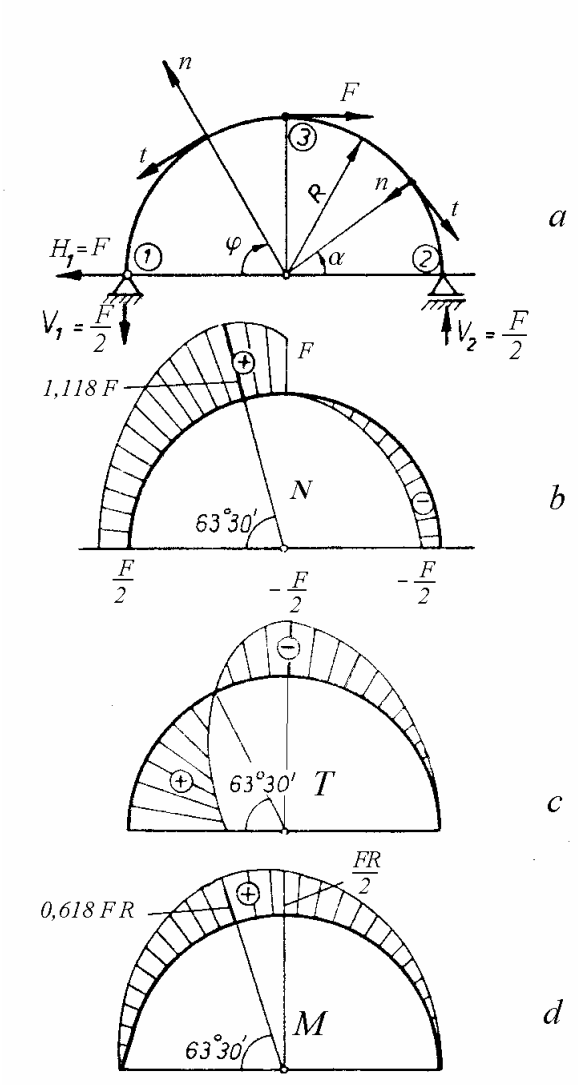


Fig. 2.22

Exemplul 2.5

În figura 2.23 se prezintă diagramele de eforturi la o bară în formă de S, cu o porțiune centrală rectilinie şi două porțiuni circulare având curburi de semne diferite.

În secțiunile unde forța tăietoare se anulează, forța axială şi momentul încovoietor au valori extreme. În partea centrală rectilinie, forțele N şi T sunt constante iar momentul încovoietor variază liniar.

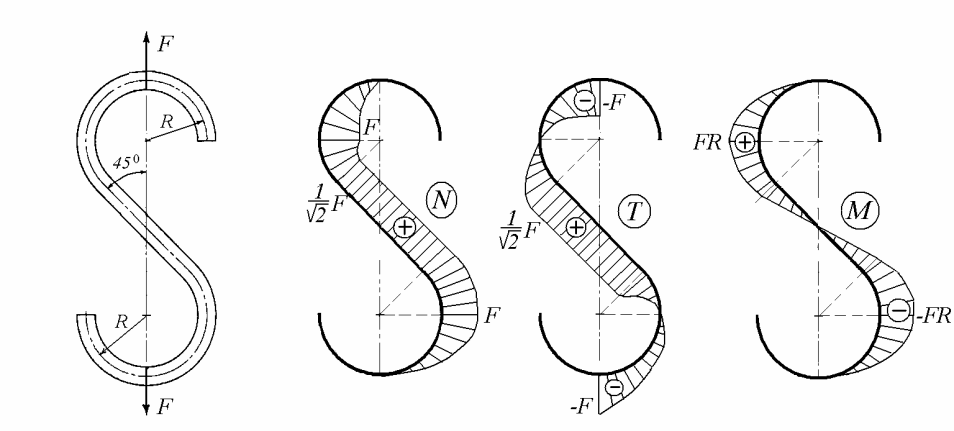


Fig. 2.23

Exemplul 2.6

În figura 2.24 se prezintă diagramele M_i şi M_t la o bară curbă plană rezemată în trei puncte, solicitată de o forță perpendiculară pe planul barei.

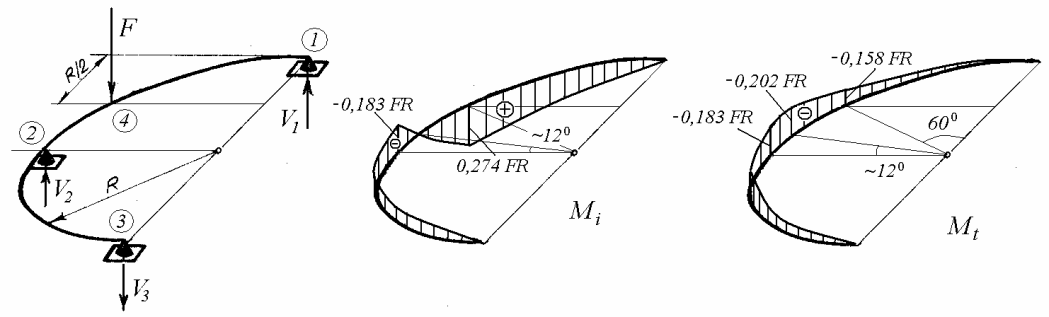


Fig. 2.24

Din ecuația de echilibru a momentelor față de linia *1-3* se calculează reacțiunea

$$V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0{,}866\, F \ .$$

Din ecuația de echilibru a momentelor față de tangenta în *1* se calculează reacțiunea

$$V_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{4} F = 0{,}183\, F\,.$$

Din ecuația de echilibru a forțelor pe verticală se obține apoi

$$V_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4} F = 0{,}317\, F\,.$$

În secțiunea *2* momentele au valorile

$$M_{i\,2} = M_{t\,2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} FR = -0{,}183\, FR\,.$$

În secțiunea *4*

$$M_{i\,4} = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{8} FR = 0{,}2745\, FR\,,$$

$$M_{t\,4} = -\frac{3-\sqrt{3}}{8} FR = -0{,}1585\, FR\,.$$

Pe intervalul *2-4*, măsurând unghiul β față de raza din secțiunea *2*, se obține momentul încovoietor

$$M_{i\,2-4} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} FR\,\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2} FR\,\sin\beta$$

care se anulează când $\beta \cong 12^0$. În secțiunea respectivă, momentul de răsucire are valoarea maximă

$$M_{t\,max} = -0{,}2021\, FR\,.$$

3.
TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII SPECIFICE

Eforturile în bare sunt mărimi convenționale, aplicate în centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale barelor, fiind independente de forma şi dimensiunile acestora. În realitate, solicitările interioare se manifestă prin acțiuni distribuite pe toată suprafața secțiunii transversale. Ele se caracterizează prin *tensiuni normale* şi *tensiuni tangențiale*, care reprezintă forțele interioare pe unitatea de suprafață.

Dimensionarea componentelor maşinilor şi construcțiilor metalice se bazează pe valori admisibile ale tensiunilor care pot acționa într-un material supus la sarcini exterioare. Pentru corpuri de grosimi mici şi cu anumite simetrii, tensiunile se pot calcula numai din considerații de echilibru. În general însă, tensiunile depind de deformațiile corpurilor. Valorile locale adimensionale ale deformațiilor corpurilor se numesc *deformații specifice.* La corpuri elastice deformațiile specifice sunt proporționale cu tensiunile care le produc.

3.1 Tensiuni

Pentru a caracteriza solicitarea din interiorul unui corp elastic, determinată de aplicarea unor sarcini exterioare, se secționează corpul (fig. 3.1, *a*) şi, prin separarea celor două părți, se pun în evidență *forțele interioare* care exprimă legătura între particulele din interiorul corpului, situate de o parte şi de cealaltă a planului de secționare (fig. 3.1, *b*).

Fie un element de suprafață ΔA, din planul secțiunii în al cărui centru de greutate P se aplică forța ΔF, rezultanta forțelor interioare ce acționează pe acest element, care în general este oblică față de elementul ΔA.

Prin definiție

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

reprezintă valoarea *tensiunii* în punctul P, pe suprafața cu normala n.

Tensiunile sunt mărimi tensoriale care depind atât de valoarea forței elementare dF cât şi de orientarea normalei n la suprafața dA. Pe o suprafață care trece prin P dar are altă orientare în spațiu, tensiunea în punctul P este diferită.

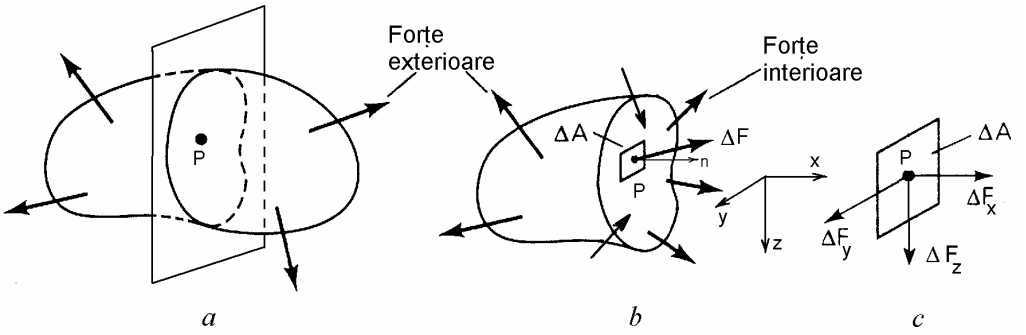


Fig. 3.1

Se descompune forța ΔF în trei componente, ΔF_x - în lungul normalei la suprafață, paralelă cu axa x, ΔF_y şi ΔF_z - în planul suprafeței transversale. Se definesc două tipuri de tensiuni, şi anume :

- tensiunea normală

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}A} \ , \qquad (3.1)$$

perpendiculară pe planul secțiunii transversale şi

- tensiunile tangențiale :

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}A} \ , \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}A} \ , \qquad (3.2)$$

situate în planul secțiunii transversale (fig. 3.2).

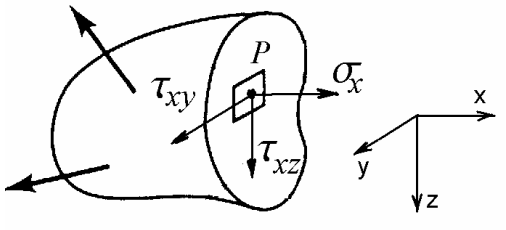


Fig. 3.2

În notația indicială, tensiunile normale au un singur indice, care definește axa cu care sunt paralele. Tensiunile tangențiale au doi indici. Primul indice arată direcția normalei la planul sau fața pe care acționează tensiunea. Al doilea indice arată direcția componentei tensiunii.

Tensiunile normale σ pot fi comparate cu presiunea din fluide, iar cele tangenţiale τ - cu frecările care apar în planul de separaţie, în cazul mişcării relative a două corpuri în contact. Tensiunile se măsoară în unităţi de forţă împărţite la unităţi de suprafaţă, deobicei în MPa sau N/mm^2. În literatura engleză tensiunile se măsoară în *psi* şi *ksi*: 1 psi = 1 lbf/in^2; 1 psi (pound/inch^2)=6,8947 kPa; 1 ksi = 1kpsi = 6,8947 MPa.

O problemă centrală a Rezistenţei materialelor este *stabilirea legii de distribuţie a tensiunilor* pe secţiunea transversală a unei bare şi determinarea valorii acestora în funcţie de sarcinile exterioare aplicate barei şi caracteristicile geometrice ale secţiunii.

3.2 Convenţii de semne pentru tensiuni

Se va utiliza un sistem de axe *drept.* Convenţia de semne pentru tensiuni se bazează pe relaţia între direcţia normalei exterioare la o suprafaţă şi direcţiile componentelor tensiunilor care acţionează pe faţa respectivă.

Pe o *faţă pozitivă* (cu normala exterioară în sensul pozitiv al axei), tensiunile pozitive sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate. Pe o *faţă negativă*, tensiunile pozitive sunt orientate în sensul negativ al axelor de coordonate. Deci tensiunile de întindere sunt totdeauna pozitive, iar tensiunile de compresiune sunt totdeauna negative.

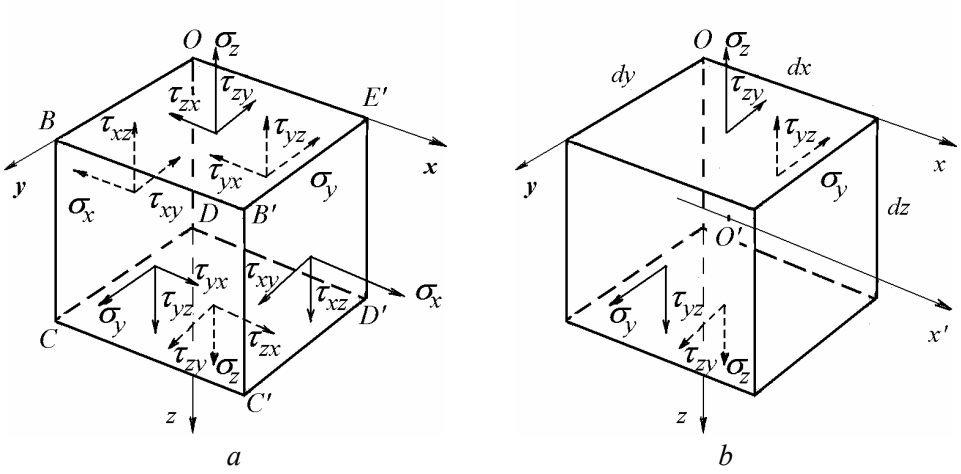


Fig. 3.3

În figura 3.3, *a* s-au pus în evidenţă componentele în lungul axelor de coordonate ale tensiunilor pozitive care acţionează pe feţele unui element de volum paralelipipedic. Pe faţa pozitivă *B′C′D′E′* tensiunile pozitive au sensul axelor de

coordonate. Pe fața negativă *OBCD* tensiunile au sens contrar axelor de coordonate.

Dintre cele şase componente ale tensiunilor tangențiale, se demonstrează că numai trei sunt diferite. Fie O' centrul paralelipipedului de laturi *dx*, *dy*, *dz* din figura 3.3, *b*, în care s-au desenat numai tensiunile care acționează într-un plan perpendicular pe axa $O'x'$, paralelă cu *Ox*.

Se scrie ecuația de momente a forțelor față de axa $O'x'$

$$2\left(\tau_{yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}y}{2}-2\left(\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\frac{\mathrm{d}z}{2}=0\,,$$

de unde rezultă $\tau_{yz}=\tau_{zy}$. Relații similare se stabilesc în planele *xOz* şi *yOz*.

Componentele tensiunilor tangențiale normale la muchia comună a două plane perpendiculare între ele sunt egale şi orientate ambele fie spre muchia comună fie în sens contrar.

Deci tensiunile tangențiale sunt complementare două câte două

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \ \tau_{yz}=\tau_{zy},\ \ \tau_{zx}=\tau_{xz}\,. \tag{3.3}$$

Se spune că relațiile (3.3) exprimă *dualitatea* sau complementaritatea tensiunilor tangențiale.

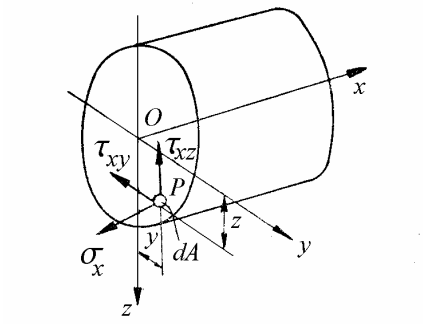


Fig. 3.4

3.3 Relații între eforturi şi tensiuni

Se consideră un element de suprafață infinitezimal $\mathrm{d}A$. Într-un punct *P*, situat pe $\mathrm{d}A$, acționează tensiunea normală σ_x şi tensiunile tangențiale τ_{xy} şi τ_{xz} (fig. 3.4). Pe elementul de suprafață d*A* acționează forțele elementare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$, $\tau_{xy}\,\mathrm{d}A$ şi $\tau_{xz}\,\mathrm{d}A$.

Astfel de forţe elementare sunt distribuite pe toată suprafaţa secţiunii transversale a barei. Reducându-le în centrul de greutate al secţiunii, se obţin *relaţiile de echivalenţă între eforturi şi tensiuni*. Acestea exprimă cele şase componente ale torsorului forţelor interioare în funcţie de tensiunile de pe elementul de suprafaţă $\mathrm{d}A$, definit în jurul punctului de coordonate y şi z.:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A, & M_{iy} &= \int_A \sigma_x \, z \,\mathrm{d}A, \\
T_y &= \int_A \tau_{xy} \,\mathrm{d}A, & M_{iz} &= -\int_A \sigma_x \, y \,\mathrm{d}A, \\
T_z &= \int_A \tau_{xz} \,\mathrm{d}A, & M_t &= \int_A \left(\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z\right)\mathrm{d}A.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

3.4 Sisteme de tensiuni static determinate

În majoritatea problemelor din Rezistenţa materialelor, calculul tensiunilor se face pe baza unor ipoteze simplificatoare privind deformaţiile, de exemplu, ipoteza secţiunii plane la bare. Există însă situaţii în care tensiunile se pot calcula utilizând doar ecuaţiile de echilibru. Este cazul problemelor simetrice privind recipienţi sub presiune cu pereţi subţiri sau răsucirea barelor cu pereţi subţiri de tip ţeavă. Acestea sunt *sisteme static determinate*. Valorile tensiunilor depind numai de dimensiunile corpului studiat şi de sarcinile exterioare. Rezultă formule de dimensionare în care grosimea peretelui se calculează pe baza unor valori admisibile ale tensiunilor maxime.

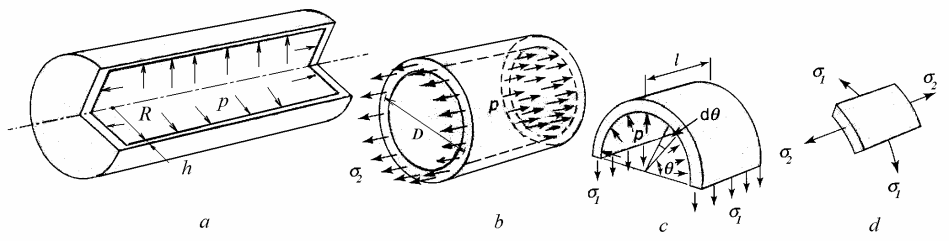


Fig. 3.5

3.4.1 Vas cilindric cu presiune interioară

Fie un vas cilindric de diametru $D = 2R$ solicitat la presiune interioară constantă p (fig. 3.5, *a*). Pereţii vasului au grosime constantă mică, $h << D$, deci se consideră că tensiunile sunt constante pe grosimea peretelui.

Asupra unui element detaşat din peretele vasului acționează (fig. 3.5, *d*) tensiuni normale circumferențiale σ_1, datorite "dilatării" vasului sub efectul presiunii interioare, şi tensiuni normale longitudinale σ_2, datorite efectului "capacelor" de la capetele vasului (fig. 3.5). Valorile acestor tensiuni se pot calcula din ecuațiile de echilibru axial şi circumferențial.

Echilibrul axial. Dacă se secționează vasul cu un plan perpendicular pe axa longitudinală (fig. 3.5, *b*) şi se izolează partea din dreapta, aceasta trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forței axiale produse de presiunea *p* pe suprafața πR^2 şi a tensiunilor longitudinale σ_2 ce acționează în peretele vasului, pe suprafața inelară $2\pi R h$.

Ecuația de proiecții a forțelor pe axa longitudinală a vasului se scrie

$$p \pi R^2 = \sigma_2 \, 2\pi R h ,$$

de unde rezultă

$$\sigma_2 = \frac{pR}{2h} = \frac{pD}{4h} . \qquad (3.5)$$

Echilibrul circumferențial. Se secționează vasul cu un plan longitudinal orizontal care trece prin axa vasului (fig. 3.5, *c*), apoi din partea superioară se detaşează o porțiune de lungime ℓ. Pe un element de suprafață $\ell R \, \mathrm{d}\theta$ acționează forța $p \ell R \, \mathrm{d}\theta$ care face unghiul θ cu orizontala. Componenta verticală este $p \ell R \, \mathrm{d}\theta \cdot \sin\theta$. Suma forțelor de presiune este echilibrată de cele două forțe $\sigma_1 h \ell$ produse de tensiunile circumferențiale. Ecuația de proiecții a forțelor pe diametrul vertical se scrie

$$\int_0^{\pi} pR \, \ell \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = p \, 2R \, \ell = 2 \sigma_1 \, h \, \ell ,$$

de unde rezultă

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h} = \frac{pD}{2h} = \sigma_{max} \ . \qquad (3.6)$$

Dacă se atribuie lui σ_{max} valoarea admisibilă σ_a, rezultă grosimea vasului

$$h = \frac{pD}{2\sigma_a} . \qquad (3.7)$$

În practică, la această valoare se adaugă adaosuri tehnologice, adaosuri de coroziune etc., deci în final grosimea vasului este mai mare decât valoarea calculată cu ajutorul formulei (3.7).

3.4.2 Inel subțire în rotație

Inelul din figura 3.6, *a* are raza medie *R*, aria secțiunii transversale *A* şi se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω .

Pentru calculul tensiunilor circumferențiale σ din inel, se aplică principiul lui d'Alembert. Asupra unui element de lungime $R\,\mathrm{d}\theta$ (fig. 3.6, *b*) acționează forța centrifugă

$$\mathrm{d}F = R\omega^2\,\mathrm{d}m = R\omega^2\rho\,A\,R\,\mathrm{d}\theta\,,$$

unde ρ este densitatea materialului.

Tensiunile normale produc forțe circumferențiale σA ale căror componente radiale sunt echilibrate de forța centrifugă

$$2\,\sigma\,A\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \cong 2\sigma\,A\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \rho\,A\omega^2R^2\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Rezultă valoarea tensiunii normale de întindere din inel

$$\sigma = \rho\,R^2\omega^2 = \rho\,v^2\,, \tag{3.8}$$

unde v este viteza tangențială a centrului secțiunii transversale.

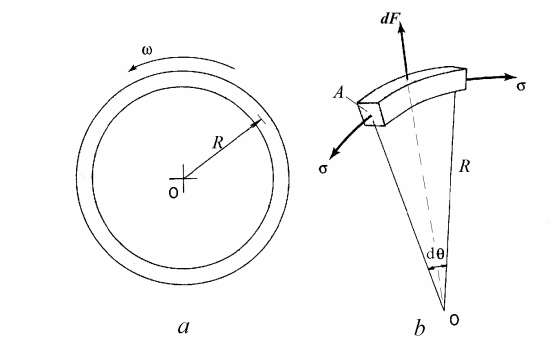


Fig. 3.6

De notat că valoarea tensiunii normale din inelul în rotație este independentă de forma şi suprafața secțiunii transversale. Pentru o valoare maximă admisibilă a tensiunii normale din inel, din relația (3.8) se poate calcula viteza unghiulară maximă admisibilă pentru un inel de rază medie dată. Dacă ω este impus, din relația (3.8) se obține raza inelului, element constructiv de bază al volantului utilizat la uniformizarea turației motoarelor cu ardere internă.

3.4.3 Învelişuri subțiri sub presiune

Învelişurile sunt corpuri mărginite de două suprafețe curbe învecinate, distanța între acestea fiind mică în comparație cu dimensiunile suprafețelor. În continuare se consideră învelişuri de rotație (axial-simetrice) sub presiune, care lucrează ca o membrană, în aşa-numita "stare fără momente". În peretele învelişului există doar tensiuni normale de întindere, denumite "tensiuni de membrană", uniform distribuite pe grosimea acestuia.

Pentru realizarea stării fără momente, trebuie îndeplinite următoarele condiții: a) forma învelişului să fie lină, fără variații bruşte ale razelor de curbură; b) sarcinile exterioare să fie uniform distribuite sau variabile lent, excluzând forțele şi momentele concentrate; c) marginile învelişului să fie astfel rezemate încât reacțiunile să nu aibă componente transversale importante şi să nu apară reacțiuni momente; d) învelişul să nu aibă margini deschise libere.

La un înveliş cu suprafața mediană de forma unui corp de rotație, *meridianele* sunt liniile obținute prin intersecția suprafeței cu plane care trec prin axa de rotație. Liniile perpendiculare pe meridiane sunt cercuri şi se numesc *paralele*.

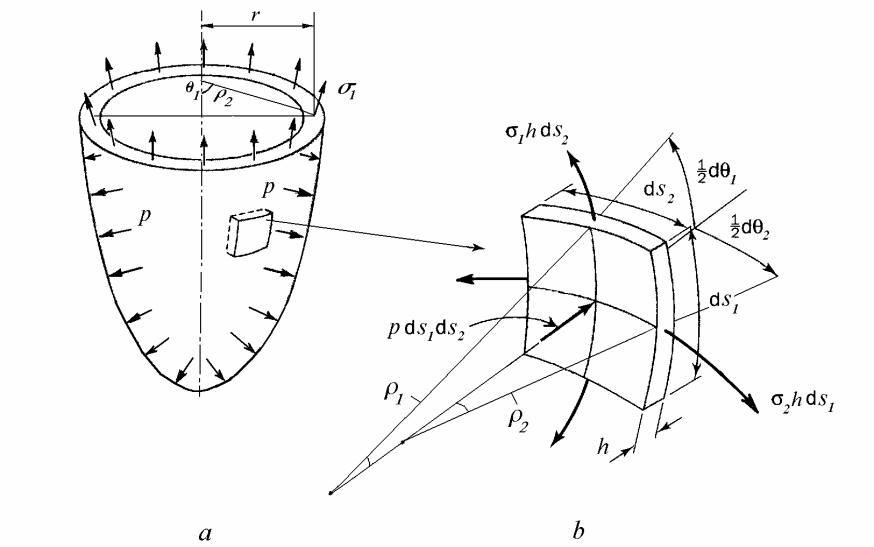


Fig. 3.7

Fie un înveliş axial-simetric sub presiune (fig. 3.7, *a*) încărcat simetric, deci cu presiune constantă pe un cerc paralel. Se decupează din înveliş un element mărginit de două meridiane şi două paralele (fig. 3.7, *b*) astfel încât unghiul celor două raze meridiane să fie $\mathrm{d}\theta_1$ iar unghiul razelor paralele să fie $\mathrm{d}\theta_2$. Se notează: σ_1 - tensiunile meridiane, σ_2 - tensiunile circumferențiale, ρ_1 - raza de curbură a

meridianului, ρ_2 - raza de curbură a paralelului, h - grosimea peretelui. Raza ρ_2 face unghiul θ_1 cu axa vasului.

Se scrie echilibrul forțelor care acționează asupra elementului de înveliș. Asupra laturilor acționează forțele $\sigma_1 h \, \mathrm{d}s_2$ şi $\sigma_2 h \, \mathrm{d}s_1$, tangente la suprafața mediană, unde $\mathrm{d}s_1 = \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1$ şi $\mathrm{d}s_2 = \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2$. Componentele lor dirijate spre centrele de curbură $\sigma_1 h \, \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2 \sin\dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{2}$ şi $\sigma_2 h \, \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \sin\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{2}$ sunt echilibrate de forța datorită presiunii interioare $p \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2$. Pentru valori mici ale unghiurilor $\mathrm{d}\theta_1$ şi $\mathrm{d}\theta_2$, sinusurile se pot înlocui cu unghiurile exprimate în radiani. Ecuația de echilibru a forțelor se scrie

$$2\sigma_1 h \, \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2 \, \mathrm{d}\theta_1 + 2\sigma_2 h \, \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \, \mathrm{d}\theta_2 = p \, \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \, \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2$$

sau

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}, \tag{3.9}$$

fiind cunoscută sub numele de *ecuația lui Laplace*.

Pentru calculul tensiunilor σ_1 şi σ_2 mai este necesară o ecuație de echilibru, a cărei formă depinde de configurația şi încărcarea învelişului studiat.

La un vas cu presiune interioară constantă, se scrie echilibrul forțelor pe verticală (fig. 3.7, *a*)

$$2\pi r h \sigma_1 \sin\theta_1 = p \pi r^2,$$

unde raza cercului paralel

$$r = \rho_2 \sin\theta_1.$$

Rezultă

$$\sigma_1 = \frac{p \rho_2}{2h}, \tag{3.10}$$

apoi, din relația (3.9), se calculează σ_2.

3.4.4 Răsucirea unui tub circular subțire

Răsucirea barelor este o problemă static nedeterminată, aşa cum este tratată în general în Capitolul 6. Totuşi, dacă raza unui tub circular este mare în comparație cu grosimea (de ex., de zece ori mai mare), atunci se poate considera că tensiunile sunt constante pe grosimea peretelui, iar problema devine static determinată.

În figura 3.8, un tub de rază medie R şi grosime a peretelui h este solicitat la răsucire de cupluri egale şi de sens contrar M_t aplicate la capete. Secționând tubul cu un plan perpendicular pe axa longitudinală, în secțiunea transversală se introduc tensiuni tangențiale care, din motive de simetrie, au valoare constantă în lungul conturului.

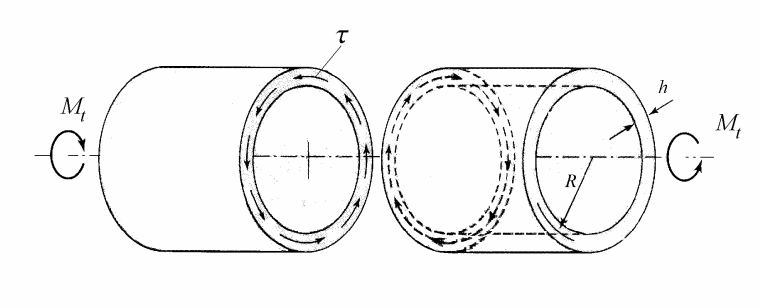


Fig. 3.8

Ecuația de echilibru a momentelor ce acționează asupra unei părți a barei se scrie

$$M_t = \tau \, 2\pi R \, h \, R \ ,$$

de unde se obține expresia tensiunilor tangențiale din tubul răsucit

$$\tau = \frac{M_t}{2 \, \pi \, h \, R^2} \, . \tag{3.11}$$

3.4.5 Forfecarea unui bolț

În îmbinarea cu tijă găurită şi furcă din figura 3.9, *a*, bolțul este forfecat ca în figura 3.9, *b*. Se consideră că tensiunile tangențiale τ sunt uniform distribuite pe suprafețele de forfecare (ceea ce contravine complementarității tensiunilor tangențiale).

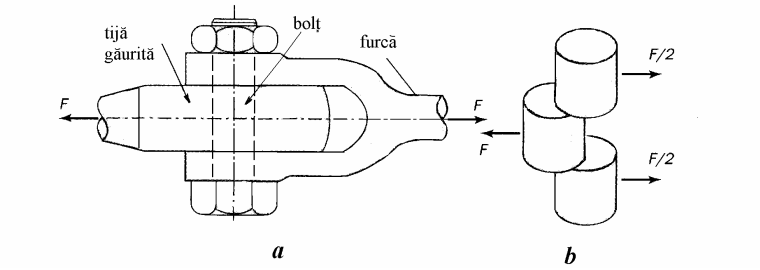


Fig. 3.9

Valoarea medie este

$$\tau = \frac{F}{2A}, \tag{3.12}$$

unde A este suprafața secțiunii transversale a bolțului. Alegând o valoare maximă admisibilă pentru τ, cu ajutorul formulei (3.12) se dimensionează bolțul.

3.5 Deformații specifice

Se consideră un corp deformabil, rezemat astfel încât să nu se poată deplasa ca un corp rigid (fig. 3.10). În acest caz, deplasările punctelor materiale din corp vor fi produse numai de deformațiile care apar sub efectul sarcinilor exterioare aplicate.

3.5.1 Alungirea specifică

Fie punctele B şi C, situate la distanța ℓ în corpul elastic nedeformat (fig. 3.10).

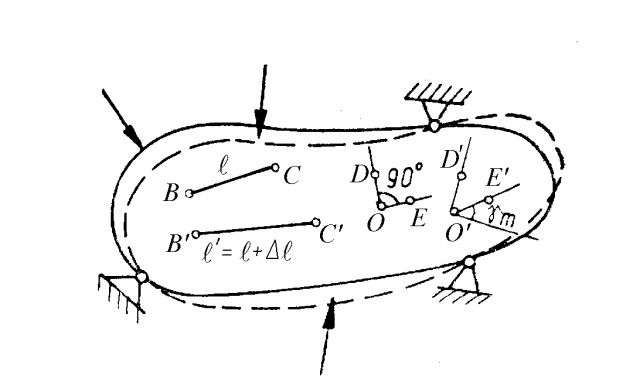


Fig. 3.10

După aplicarea sarcinilor exterioare, corpul se deformează, punctul B deplasându-se in B', iar C în C'. Distanța între cele două puncte devine ℓ'.

Diferența între lungimea finală ℓ' şi cea inițială ℓ a segmentului considerat se numeşte *alungire*:

$$\Delta\ell = \ell' - \ell . \tag{3.13}$$

Raportul între alungirea $\Delta \ell$ şi lungimea inițială ℓ se numeşte *alungire specifică medie*:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta \ell}{\ell}. \tag{3.14}$$

La limită, când $\ell \to 0$, se obține alungirea specifică în punctul *B*, pe direcția *BC*:

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{\ell \to 0} \frac{\Delta \ell}{\ell}. \tag{3.15}$$

În general, alungirea în punctul *B*, pe altă direcție, este diferită.

Alungirile specifice ε sunt produse de tensiuni normale σ şi determină modificarea volumului corpului elastic.

3.5.2 Lunecarea specifică

Fie unghiul drept format de segmentele *OD* şi *OE* în corpul elastic nedeformat (fig. 3.10). După aplicarea sarcinilor exterioare, punctele se deplasează iar unghiul considerat devine $\angle D'O'E'$.

Unghiul γ_m, care măsoară variația unghiului de 90^o în urma deformației corpului, se numeşte (unghi de) lunecare medie:

$$\gamma_m = \angle DOE - \angle D'O'E'. \tag{3.16}$$

La limită, când segmentele $OD \to 0$, $OE \to 0$, se obține (unghiul de) *lunecarea specifică* în punctul *O*, în planul *DOE*:

$$\gamma_{DOE} = \lim_{\substack{OD \to 0 \\ OE \to 0}} \left(\angle DOE - \angle D'O'E' \right) \tag{3.17}$$

Lunecările specifice γ sunt produse de tensiunile tangențiale τ şi determină modificarea formei corpului.

Între deformații specifice şi deplasările punctelor corpului elastic se stabilesc relații geometrice (cinematice). Eliminând deplasările se obțin *relații de compatibilitate* între alungirile specifice şi lunecările specifice.

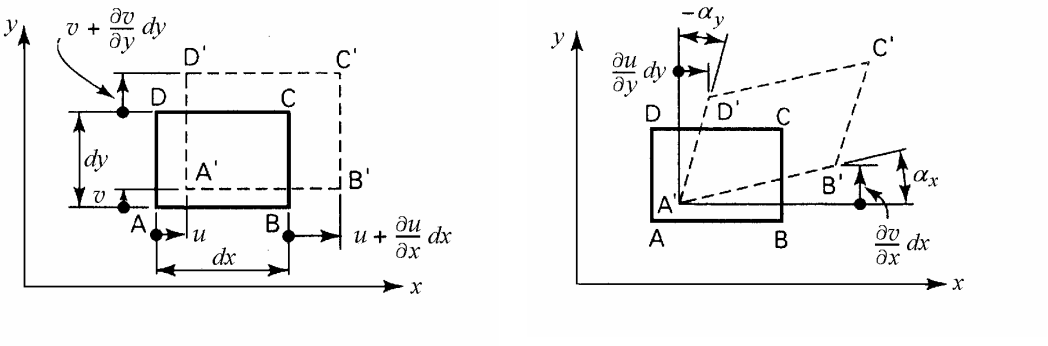
3.5.3 Relații între deformații specifice şi deplasări

Fie un element de dimensiuni *dx*, *dy* şi grosime egală cu 1 (fig. 3.11), detaşat dintr-un corp elastic. Sub acțiunea sarcinilor aplicate, apar două feluri de

deformaţii, care vor fi tratate separat: lungimile laturilor se modifică (fig. 3.11, *a*) iar elementul se distorsionează, laturile sale rotindu-se relativ (fig. 3.11, *b*).

Latura *AB*, de lungime iniţială *dx*, se deplasează în poziţia *A'B'*, alungirea sa fiind egală cu diferenţa deplasărilor capetelor $\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)-u$. Împărţind alungirea la lungimea iniţială se obţine alungirea specifică pe direcţia *x*, apoi, printr-un calcul analog, alungirea specifică pe direcţia *y*

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.18}$$



a *b*

Fig. 3.11

Pentru calculul lunecării specifice, se consideră variaţia unghiului drept $\angle BAD$ (fig. 3.11, *b*). Rotirea laturii *AB* este $\alpha_x\cong \operatorname{tg}\alpha_x=\frac{\partial v}{\partial x}$, în timp ce rotirea laturii *AD* este $-\alpha_y=\frac{\partial u}{\partial y}$. Variaţia totală a unghiului drept $\angle BAD$ este lunecarea specifică în planul *xOy*

$$\gamma_{xy}=\alpha_x-\alpha_y=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.19}$$

Lunecările specifice sunt pozitive atunci când unghiul drept descreşte.

Pentru un element paralelipipedic cu laturile *dx*, *dy*, *dz*, se stabilesc relaţiile

$$\begin{gathered}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\\ \gamma_{xy}=\gamma_{yx},\qquad \gamma_{yz}=\gamma_{zy},\qquad \gamma_{zx}=\gamma_{xz}.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Eliminând deplasările din relațiile (3.20) se obțin relații între deformațiile specifice, numite *ecuații de compatibilitate*. În planul *xOy* se obține

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (3.21, a)$$

Se mai stabilesc relații de forma

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right). \qquad (3.21, b)$$

3.6 Relații între tensiuni şi deformații specifice

Pentru solicitări de mică intensitate şi la o serie de materiale utilizate în practica inginerească, între tensiuni şi deformații specifice se stabilesc relații liniare (R. Hooke, 1678) cunoscute sub numele de *legea lui Hooke*.

Relația între tensiuni normale şi alungiri specifice are forma

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (3.22)$$

unde *E* este *modulul de elasticitate longitudinal* (*modulul lui Young*) al materialului (Th. Young, 1807).

Relația între tensiuni tangențiale şi lunecări specifice are forma

$$\tau = G\,\gamma \qquad (3.23)$$

unde *G* este *modulul de elasticitate transversal* (modulul de forfecare) al materialului.

Deoarece deformațiile specifice sunt mărimi adimensionale, modulele de elasticitate au aceleaşi dimensiuni ca tensiunile, deci se măsoară în unități de forță împărțite la unități de suprafață sau în Pascal. Valori uzuale la oțel sunt *E*=210 GPa şi *G*=81 GPa. Pentru alte materiale se dau valori orientative în Tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

	Materialul	*E*, GPa	*G*, GPa
1	oțeluri	190 - 208	77 - 83
2	cupru	110 - 120	37 - 46
3	aluminiu	69 - 70	24 - 28
4	sticlă	50 - 80	20 - 35
5	polistiren	1,1 - 3,3	0,4 - 1,2

Relațiile între tensiuni şi deformații specifice pentru starea tridimensională de tensiuni sunt prezentate în Capitolul 9.

4.

CARACTERISTICI MECANICE LA ÎNCĂRCĂRI MONOTONE

O serie de încercări mecanice relativ simple sunt folosite pentru evaluarea proprietăților materialelor. Rezultatele sunt utilizate în proiectarea inginerească şi ca bază în compararea şi alegerea materialelor.

Încercările la tracțiune se fac pentru evaluarea constantelor elastice, a rezistenței, ductilității şi întăririi materialelor. Se determină modulul de elasticitate, E, ca o măsură a rigidității, limita de curgere, σ_c, care defineşte rezistența la apariția deformațiilor plastice, şi rezistența la tracțiune, σ_r, cea mai mare tensiune convențională care poate exista în material. Coeficientul lui Poisson, ν, poate fi calculat dacă se măsoară şi deformația specifică transversală. Alungirea la rupere caracterizează ductilitatea materialului, capacitatea de a se deforma fără să se rupă. Coeficientul de rezistență, K, şi coeficientul de ecruisare, n, caracterizează materialele cu întărire, deformate elasto-plastic.

Încercările la compresiune se fac pentru evaluarea unor proprietăți similare la materiale solicitate în principal la compresiune, ca betonul şi piatra de construcții, sau la materiale fragile, ca sticla şi ceramicele. Încercarea de rezistență la forfecare pură permite măsurarea modulului de elasticitate transversal G, a limitei de curgere şi a rezistenței de rupere la forfecare pură.

Încercările de duritate, reziliență, încovoiere sau răsucire nu fac obiectul acestui curs.

4.1 Încercarea la tracțiune monoaxială

Pentru stabilirea relației între tensiunile normale σ şi alungirile specifice ε, se face *încercarea la tracțiune* (la materiale metalice, conform *SR EN* 10002-1). Se utilizează o epruvetă, având forma din figura 4.1, la care se cunoaşte aria

secțiunii transversale inițiale A_o în porțiunea centrală calibrată şi pe care se marchează două repere la distanța L_o.

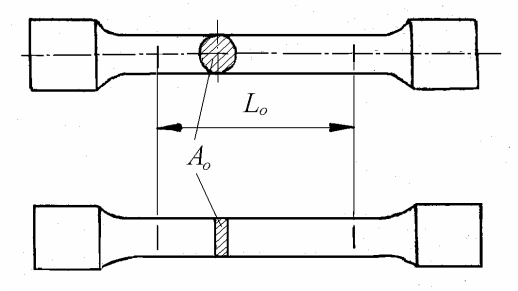


Fig. 4.1

Epruveta se obține, în general, prin prelucrarea unei probe dintr-un semifabricat turnat. Produsele cu secțiuni constante (profile, bare, sârme etc.) precum şi epruvetele brute turnate (de exemplu: fonte, aliaje neferoase) pot fi supuse încercării fără a fi prelucrate. Secțiunea transversală a epruvetelor poate fi circulară, pătrată, dreptunghiulară, inelară, sau, în cazuri speciale, de alte forme.

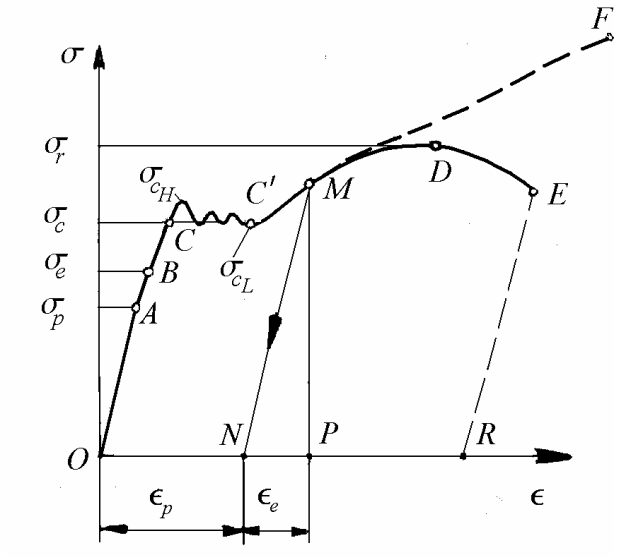


Fig. 4.2

Epruveta se montează într-o maşină de încercat la tracțiune, cu ajutorul căreia se aplică pe direcția axei longitudinale o forță de întindere F, care în timpul încercării creşte continuu, fără şoc sau vibrații, până se produce ruperea epruvetei. Concomitent se măsoară distanța între repere L, respectiv alungirea (extensia) epruvetei $\Delta L = L - L_o$, cu ajutorul unui extensometru.

Dacă se reprezintă grafic forța de întindere F în funcție de alungirea ΔL, se obține o diagramă care depinde de dimensiunile epruvetei, deci care nu caracterizează numai comportarea materialului încercat.

Dacă se reprezintă grafic dependența între tensiunea normală $\sigma = \frac{F}{A_o}$ şi alungirea specifică $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$, atunci se obține *curba caracteristică a materialului* (fig. 4.2), denumită şi *diagrama încercării la tracțiune*. Aceasta este o curbă *convențională*, deoarece tensiunea se calculează pe baza ariei secțiunii inițiale A_o a epruvetei, iar alungirea specifică - pe baza lungimii inițiale între repere L_o, mărimi mai uşor de măsurat.

De notat că în unele manuale de Rezistența materialelor şi în unele standarde de încercări de materiale (de exemplu: STAS 6605-78) mărimea $\Delta L = L - L_o$ se numeşte *lungire*, iar $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$ se numeşte lungire specifică sau *alungire*.

4.1.1 Caracteristici mecanice la încărcări monotone

Pe curba din figura 4.2, care corespunde unui oțel cu conținut redus de carbon, s-au marcat câteva puncte importante, ale căror ordonate definesc unele caracteristici mecanice ale materialului.

a) *Limita de proporționalitate* σ_p este valoarea tensiunii până la care relația între σ şi ε este liniară (ordonata punctului A). Ecuația porțiunii OA a curbei caracteristice se poate scrie sub forma legii lui Hooke (3.22)

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (4.1)$$

a cărei pantă E este *modulul de elasticitate longitudinal* (Th. Young, 1807).

b) *Limita de elasticitate* σ_e este valoarea tensiunii până la care materialul se comportă elastic (ordonata punctului B), deci până la care deformațiile sunt reversibile. La unele materiale se definește o *limită de elasticitate convențională* $\sigma_{0,01}$. Aceasta reprezintă valoarea tensiunii la care apar local primele deformații plastice, căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o alungire specifică remanentă de 0,01% (100 μm / m).

Pentru majoritatea materialelor utilizate în construcția de maşini, limita de elasticitate este foarte apropiată de limita de proporționalitate, deşi cele două mărimi sunt definite diferit. De asemenea, unele materiale pot avea o comportare elastică (revin după descărcare la dimensiunile inițiale), însă neliniară. De

exemplu, particulele filamentare denumite *whiskers* pot avea deformații specifice elastice până la 2%.

c) *Limita de curgere aparentă* σ_c este valoarea tensiunii la care epruveta începe să se deformeze apreciabil sub sarcină constantă (ordonata punctului *C*), marcând apariția deformațiilor plastice ireversibile. Porțiunea *CC'* a curbei caracteristice se numeşte *palier de curgere*. Se disting *limita de curgere superioară*, σ_{cH}, definită de valoarea tensiunii în momentul când se observă prima scădere a forței aplicate epruvetei, şi *limita de curgere inferioară*, σ_{cL}, valoarea cea mai mică a tensiunii în timpul curgerii plastice (C. Bach – 1904), neglijând în acest timp eventualele fenomene tranzitorii.

La unele materiale, palierul de curgere nu există, curba caracteristică având alura din figura 4.3. Se defineşte o *limită de curgere convențională* $\sigma_{0,2}$. Aceasta reprezintă valoarea tensiunii căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o alungire specifică remanentă de 0,2% (2 mm / m).

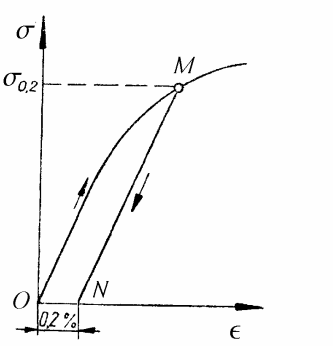


Fig. 4.3

d) *Rezistența la tracțiune* σ_r, denumită şi *rezistență la rupere,* este tensiunea corespunzătoare forței maxime înregistrate în cursul încercării după depăşirea limitei de curgere (ordonata punctului *D* din fig. 4.2).

Limitele şi rezistențele definite pe baza curbei caracteristice convenționale sunt constante de material, deci valori fixe ale tensiunii normale. Pentru a le distinge de tensiunile de întindere variabile σ, acestea se notează uneori diferit. În încercarea materialelor se folosesc următoarele notații: rezistența la tracțiune $\sigma_r = R_m$, limita de curgere $\sigma_c = R_e$, limita de curgere convențională $\sigma_{0,2} = R_{p0,2}$ (conform *SR EN* 10002-1).

Porțiunea *C'D* a curbei caracteristice se numeşte zonă de *întărire* sau zonă de *ecruisare,* deoarece marchează o creştere a rezistenței opuse de material la creşterea deformației plastice după depăşirea palierului de curgere.

Punctul *E* marchează ruperea epruvetei. Aparent, ruperea se produce la o valoare a tensiunii inferioară rezistenței la tracțiune. Aceasta se datorește faptului că se trasează o curbă caracteristică convențională, calculând tensiunea prin împărțirea forței *F* la aria inițială A_o a secțiunii transversale.

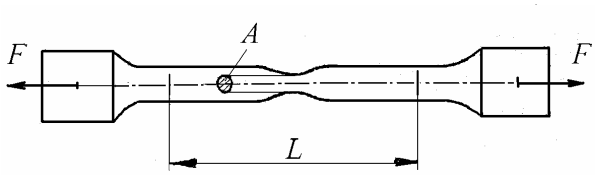


Fig. 4.4

Când forța se apropie de valoarea corespunzătoare punctului *D*, într-o secțiune a epruvetei apare o gâtuire, ilustrată în figura 4.4, care devine tot mai pronunțată până se produce ruperea. Aria secțiunii transversale scăzând, *tensiunea reală* în secțiunea de rupere crește peste valoarea convențională, astfel că, în momentul ruperii epruvetei, ea are într-adevăr valoarea maximă mai mare ca σ_r .

Curba caracteristică reală este desenată cu linie întreruptă în figura 4.2.

În cazul când epruveta este solicitată peste limita de curgere, până la tensiunea corespunzătoare punctului *M*, apoi este descărcată, se constată că linia de descărcare *MN* este paralelă cu linia *OA* - porțiunea inițială a curbei caracteristice (Fig. 4.2). După descărcare, atunci când $\sigma = 0$, epruveta nu revine la dimensiunile inițiale. Segmentul $ON = \varepsilon_p$ caracterizează deformația specifică plastică (ireversibilă), în timp ce segmentul $NP = \varepsilon_e$ caracterizează deformația specifică elastică (reversibilă) a epruvetei încărcate până la tensiunea corespunzătoare punctului *M*. Se spune că materialul a fost încărcat *elasto-plastic*.

La o nouă încărcare, punctul care definește starea materialului parcurge întâi dreapta *NM*, apoi revine pe curba *MDE* astfel că, aparent, limita de proporționalitate corespunde punctului *M*. Materialul se comportă liniar până la tensiuni superioare limitei de curgere, fiind *ecruisat*, proprietate utilizată în practică.

Segmentul *OR* măsoară *alungirea specifică la rupere*, mărime ce caracterizează *ductilitatea* materialului, deci proprietatea de a se deforma mult fără să se rupă. O altă măsură a ductilității este coeficientul de gâtuire

$$Z = \frac{A_o - A_u}{A_o} \cdot 100 \qquad (4.2)$$

unde A_u , aria ultimă, este aria minimă a secțiunii după rupere.

La materialele *tenace*, care au deformații plastice mari înainte de rupere, porțiunea *CDE* a curbei caracteristice este relativ extinsă. La materialele *fragile*, porțiunea *CDE* lipseşte, ruperea producându-se fără apariția deformațiilor plastice.

În practica inginerească se urmăreşte ca tensiunile maxime din piese să nu depăşească limita de curgere - la materiale tenace, sau rezistența la rupere - în cazul materialelor fragile. Aceste două caracteristici mecanice ale materialelor stau la baza definirii *rezistențelor admisibile*, tensiunile maxime ce pot exista într-un corp şi a *sarcinilor limită* ce pot acționa asupra unui element de structură sau maşină, în condiții date de funcționare şi mediu ambiant.

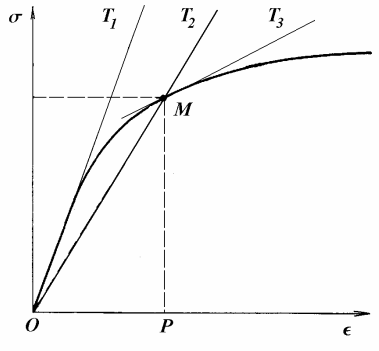


Fig. 4.5

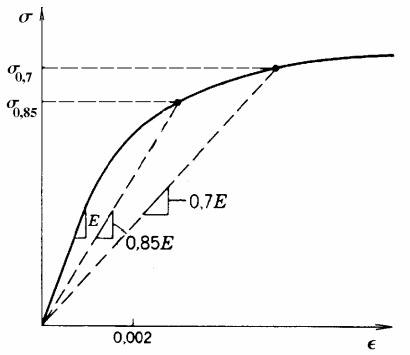


Fig. 4.6

O grupă mare de materiale, printre care se pot aminti alama, cuprul, aliajele de aluminiu, betonul şi cauciucul, prezintă curbe caracteristice ca în figura 4.5, cu un traseu curbiliniu până la rupere. Pentru acestea se definesc:

1) modulul de elasticitate tangent (F. Engesser, 1889)

$$E_t = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}, \tag{4.3}$$

dat de panta tangentei MT_3;

2) modulul de elasticitate secant

$$E_s = \frac{MP}{OP}, \tag{4.4}$$

dat de panta secantei OT_2.

Deobicei se utilizează modulul de elasticitate în origine, E, dat de panta tangentei OT_1 în origine la curba caracteristică, denumit *modulul lui Young*. Valorile modulelor E_t şi E_s depind de nivelul tensiunii la care se măsoară.

4.1.2 Formula Ramberg-Osgood

În multe cazuri este utilă o relație analitică între tensiuni şi deformații specifice, care să descrie curba caracteristică a unui material şi în zona neliniară. Se utilizează relații de forma

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \beta\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n$$

în care E, β şi n sunt constante de material care se determină experimental.

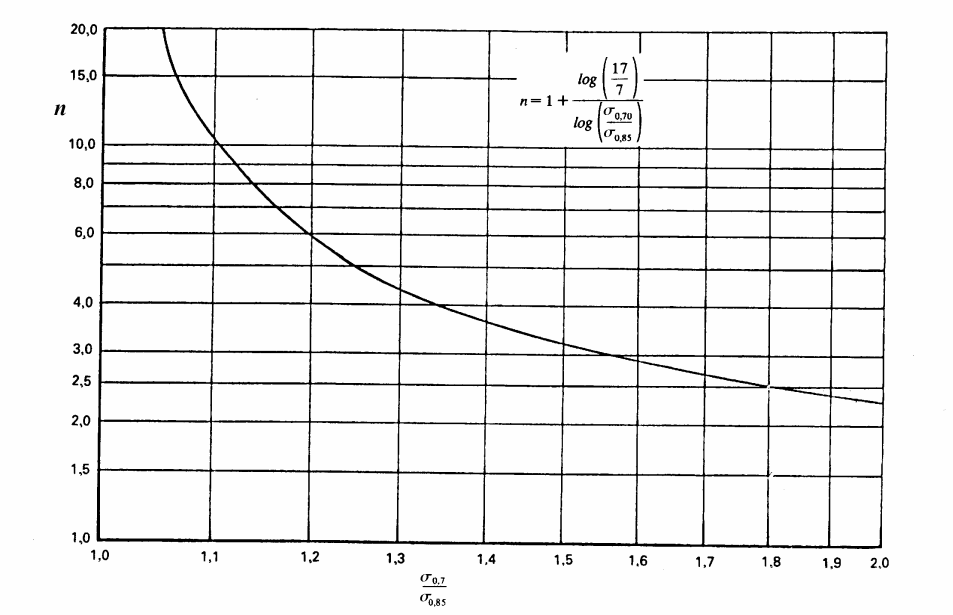


Fig. 4.7

În calculul structurilor aeronautice este utilizată formula stabilită de W. Ramberg şi W.R. Osgood (1943). Impunând aceeaşi pantă în origine, E, ceilalți doi parametri se determină printr-o metodă de colocație, din condiția ca cele două curbe, analitică şi experimentală, să treacă prin punctele în care modulul secant este $0{,}7E$, respectiv $0{,}85E$ (fig. 4.6).

Rezultă

$$\frac{E\,\varepsilon}{\sigma_{0,7}} = \frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} + \frac{3}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}}\right)^n \tag{4.5}$$

unde

$$n = 1 + \frac{\log\left(\frac{17}{7}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_{0,7}}{\sigma_{0,85}}\right)} \tag{4.6}$$

iar $\sigma_{0,7}$ şi $\sigma_{0,85}$ sunt ordonatele punctelor de intersecție a curbei caracteristice cu liniile secante de pantă 0,7*E*, respectiv 0,85*E*.

Diagrama exponentului *n* în funcție de raportul $\frac{\sigma_{0,7}}{\sigma_{0,85}}$ este dată în figura 4.7.

Pe baza relațiilor (4.5) şi (4.6) se pot defini algebric modulul secant

$$E_s = \frac{E}{1 + \frac{3}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}}\right)^{n-1}} \tag{4.7}$$

şi modulul tangent

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{3n}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}}\right)^{n-1}}. \tag{4.8}$$

Rezultă că sunt suficiente trei valori *E*, $\sigma_{0,7}$ şi $\sigma_{0,85}$, măsurate pe o curbă caracteristică determinată experimental, pentru a stabili relația (4.5) care reprezintă o bună aproximare a curbei $\sigma - \varepsilon$ a materialului până la apariția gâtuirii.

4.2 Contracția transversală

Se constată că, odată cu lungirea (scurtarea) unei epruvete, apare o micşorare (creştere) a dimensiunilor suprafeței secțiunii transversale, proporțională cu alungirea epruvetei (S.D. Poisson, 1829). La o deformație specifică ε în lungul axei barei, corespunde o deformație specifică transversală

$$\varepsilon_t = -\nu\,\varepsilon, \tag{4.9}$$

unde ν se numeşte *coeficient de contracție transversală* (coeficientul lui Poisson). În general $\nu = 0...0{,}5$. La oțeluri $\nu \cong 0{,}3$ iar la materialele utilizate curent în practică $\nu = 0{,}25...0{,}33$. La cauciucuri $\nu \to 0{,}5$. La fel, la încărcări peste limita de proporționalitate, ν creşte progresiv şi tinde spre 0,5 la deformații plastice mari.

Între caracteristicile elastice ale materialelor izotrope *E*, *G* şi ν se stabileşte relaţia

$$E = 2\left(1+\nu\right)G\,. \tag{4.10}$$

Cu ajutorul ei se poate calcula, de exemplu *G*, pe baza valorilor măsurate ale modulului de elasticitate longitudinal *E* şi coeficientului lui Poisson ν .

4.3 Tensiuni şi deformaţii specifice reale

Datele primare obţinute prin încercarea la tracţiune sunt alungiri ΔL măsurate la diferite valori *F* ale forţei de întindere aplicate epruvetei. În aplicaţii cu solicitări în domeniul elasto-plastic este util să se lucreze cu tensiuni reale şi alungiri specifice reale, în locul celor convenţionale. Acestea se obţin împărţind forţa de întindere la aria instantanee a suprafeţei transversale şi alungirea - la lungimea instantanee între repere.

4.3.1 Tensiunea reală

Tensiunea relă este definită de relaţia

$$\widetilde{\sigma} = \frac{F}{A} \tag{4.11}$$

unde *A* este aria instantanee a secţiunii transversale a epruvetei.

Tensiunile reale $\widetilde{\sigma}$ pot fi exprimate în funcţie de tensiunile convenţionale σ prin relaţia

$$\widetilde{\sigma} = \sigma\,\frac{A_o}{A}\,. \tag{4.12}$$

Rezultă că la încercarea de întindere, după apariţia gâtuirii, tensiunile reale sunt mai mari decât cele convenţionale. La un material ductil, înaintea ruperii, tensiunile reale pot fi de două ori sau chiar mult mai mari decât cele convenţionale.

4.3.2 Alungirea specifică reală

Dacă, la diferite momente în timpul încercării la tracţiune, lungimea între repere este L_1, L_2, L_3 etc., iar alungirile instantanee corespunzătoare sunt $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3$ etc., atunci alungirea specifică totală este

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_3}{L_3} + ... = \sum_i \frac{\Delta L_i}{L_i} \qquad (4.13)$$

iar $\Delta L = \sum \Delta L_i$.

La limită, dacă alungirea ΔL este măsurată în creşteri infinitezimale, suma (4.13) este echivalentă cu o integrală. Alungirea specifică reală este (A. Mesnager, 1900)

$$\widetilde{\varepsilon} = \int_{L_o}^{L} \frac{\mathrm{d}L}{L} = \ln \frac{L}{L_o}, \qquad (4.14)$$

unde $L = L_o + \Delta L$ este lungimea instantanee între repere a epruvetei.

Între alungirile specifice reale şi cele convenționale se stabileşte relația

$$\widetilde{\varepsilon} = \ln\left(1 + \varepsilon\right) \qquad (4.15)$$

valabilă numai până la apariția gâtuirii, când deformațiile specifice sunt constante pe toată lungimea între repere a epruvetei.

Alungirile specifice reale sunt ceva mai mici decât alungirile specifice convenționale corespunzătoare. Diferența devine importantă la o deformație specifică convențională de 10% pentru care $\widetilde{\varepsilon} = \ln\left(1 + 0{,}1\right) = 0{,}0953$.

4.3.3 Ipoteza constanței volumului

Deoarece volumul metalelor se modifică puțin (sub 1/1000) la deformații plastice mari, se poate considera că în acest caz volumul epruvetei rămâne constant, deci $A_o L_o = AL = \text{const.}$, sau $\frac{A_o}{A} = \frac{L}{L_o}$.

Rezultă

$$\widetilde{\varepsilon} = \ln \frac{L}{L_o} = \ln \frac{A_o}{A} \qquad (4.16)$$

şi

$$\widetilde{\sigma} = \sigma\left(1 + \varepsilon\right) \qquad (4.17)$$

sau

$$\widetilde{\sigma} = F\left(\frac{L}{L_o\, A_o}\right), \qquad (4.17, a)$$

relații valabile numai până la apariția gâtuirii şi numai dacă deformațiile elastice sunt neglijabile față de cele plastice.

4.3.4 Curba caracteristică reală

Alungirea specifică reală totală poate fi scrisă ca suma a două componente, una liniar-elastică, cealaltă neliniară plastică

$$\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}_e + \widetilde{\varepsilon}_p \,. \tag{4.18}$$

Pentru multe metale, dacă se reprezintă în coordonate logaritmice tensiunea reală $\widetilde{\sigma}$ în funcție de alungirea specifică reală plastică $\widetilde{\varepsilon}_p$, rezultă o linie dreaptă, deci se poate admite o relație de forma

$$\widetilde{\sigma} = K\left(\widetilde{\varepsilon}_p\right)^n, \tag{4.19}$$

sau

$$\widetilde{\varepsilon}_p = \left(\frac{\widetilde{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.19, a}$$

atribuită lui J. H. Hollomon (1945).

În relația (4.19), K este *coeficientul de rezistență* iar n este *coeficientul de ecruisare* la tracțiune (conform *SR ISO* 10275 pentru table şi benzi metalice). De notat că exponentul n este diferit de cel din formula (4.5).

Un oțel cu $\sigma_r = 440$ MPa şi $\sigma_c = 260$ MPa are $K = 737$ MPa şi $n = 0{,}19$. În general $n = 0{,}...{,}0{,}5$. Valori ale lui n sub 0,1 sunt considerate mici, iar valori peste 0,2 sunt considerate mari.

Din (4.18) rezultă alungirea specifică reală totală

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\widetilde{\sigma}}{E} + \left(\frac{\widetilde{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.20}$$

relație care permite o descriere analitică a *curbei caracteristice reale* (fig. 4.8). O relație asemănătoare este utilizată în cazul încărcărilor ciclice ale materialelor.

De notat că în relația (4.20) s-a utilizat modulul de elasticitate longitudinal E calculat ca panta în origine a curbei caracteristice convenționale. Se poate arăta că modulul de elasticitate real, calculat din relația $\widetilde{E} = \widetilde{\sigma}/\widetilde{\varepsilon}$, diferă nesemnificativ de modulul $E = \sigma/\varepsilon$ calculat pe baza curbei convenționale, mai uşor de măsurat.

La alungiri specifice mari, în secțiunea gâtuită apare o stare de tensiuni triaxială. Datorită coexistenței unor tensiuni circumferențiale, tensiunile axiale sunt

mai mari, fapt de care se ține cont prin factorul de corecție B introdus de P. W. Bridgman (1944). Tensiunea reală se calculează din relația

$$\tilde{\sigma}_B = B\,\tilde{\sigma} \tag{4.21}$$

unde, pentru $0{,}15 \le \tilde{\varepsilon} \le 3$, factorul lui Bridgman este

$$B = 0{,}83 - 0{,}186 \log \tilde{\varepsilon}\,. \tag{4.22}$$

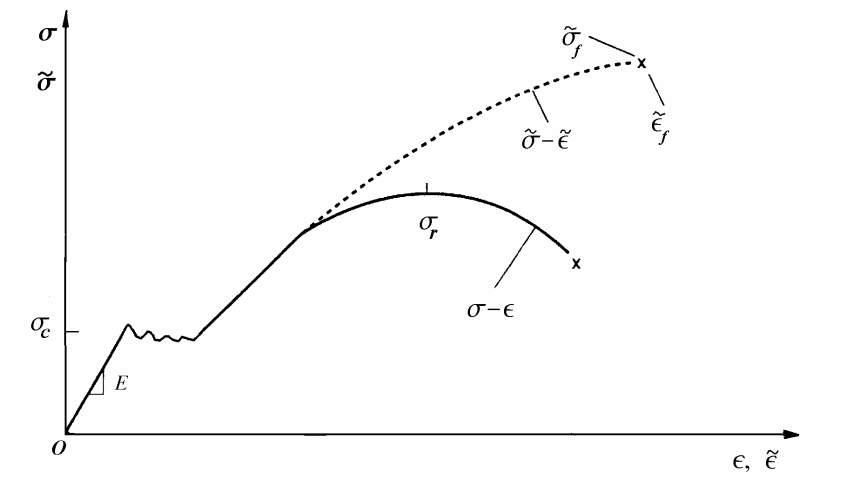


Fig. 4.8

Coordonatele punctului de rupere de pe curba caracteristică reală (fig. 4.8) sunt $\tilde{\sigma}_f$ - *rezistența la rupere reală* şi $\tilde{\varepsilon}_f$ - *alungirea specifică la rupere reală,* o măsură a ductilității materialului În general, $\tilde{\varepsilon}_f = 0,...,2$.

4.4 Încercări la compresiune şi la forfecare

Încercarea la compresiune se face în primul rând pentru materiale a căror comportare la compresiune diferă de cea la întindere şi uneori la materiale utilizate să preia solicitări de compresiune. Epruvetele sunt în general cilindrice, cu raportul lungime/diametru = 1 până la 3.

Materialele fragile, cum sunt fonta, betonul, piatra de construcție şi unele materiale ceramice, sunt încercate până la rupere. Ruperea la compresiune este în general produsă de tensiunile tangențiale, astfel că suprafețele de rupere sunt înclinate față de axa epruvetei. Materialele tenace nu se rup la compresiune. Curba

caracteristică la compresiune a metalelor ductile are o porţiune iniţială identică cu cea a curbei caracteristice la tracţiune, încercarea făcându-se până la curgere.

În general, prin încercarea la compresiune a oţelurilor (conform STAS 1552-78) se obţin aceleaşi valori pentru $\sigma_p, \sigma_e, \sigma_c$ şi E ca la încercarea la întindere. Totuşi, dacă o bară de oţel ecruisată prin întindere este încercată ulterior la compresiune, se constată că limita de curgere la compresiune este inferioară celei determinate prin încercarea de întindere, fenomen cunoscut sub denumirea de "efect Bauschinger".

Relaţia între tensiunile tangenţiale τ şi lunecările specifice γ se poate stabili prin încercarea de rezistenţă la forfecare pură (conform STAS 7926-67).

În domeniul liniar, aceasta are forma legii lui Hooke (3.23)

$$\tau = G\,\gamma \tag{4.23}$$

unde G este *modulul de elasticitate transversal* al materialului.

Se utilizează aşa-numita *epruvetă Iosipescu,* cu două crestături unghiulare transversale, cu feţele formând unghiuri de 90^o şi de adâncime egală cu 1/4 din înălţime (Fig. 4.9). Aceasta asigură aplicarea unei solicitări de forfecare pură, cu o distribuţie practic uniformă a tensiunilor tangenţiale pe toată înălţimea secţiunii.

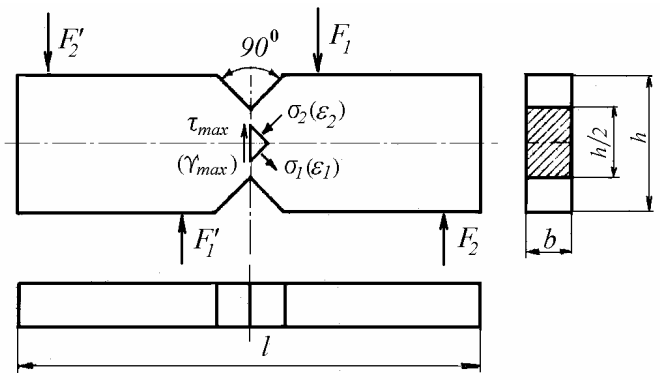


Fig. 4.9

Măsurarea lunecărilor specifice γ, produse sub acţiunea tensiunilor tangenţiale din secţiunea de forfecare pură în domeniul elastic, se realizează prin măsurarea alungirilor specifice ε_1 şi ε_2 pe direcţiile principale (v. Cap. 9) înclinate la 45^0 $\left(\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)$. Pentru determinarea alungirilor specifice se utilizează tensometria electrică rezistivă (v. *Anexa 6*).

Epruveta este solicitată la încovoiere (Fig. 4.10), cu variație liniară a momentului încovoietor şi cu moment nul în secțiunea în care se produce ruperea prin solicitare la forfecare pură (N. Iosipescu, 1959).

Prin *forfecare pură* se înțelege solicitarea produsă numai de tensiuni tangențiale paralele cu o singură direcție din planul unei secțiuni transversale a unei piese, fără ca pe acea secțiune să acționeze tensiuni normale (v. Cap.9).

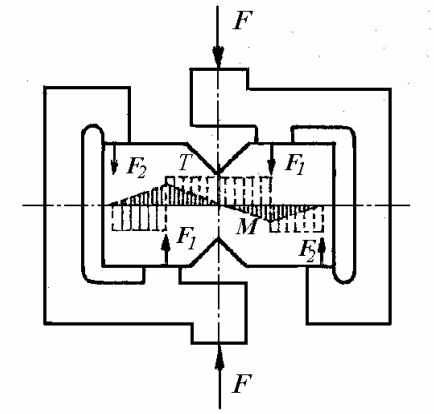


Fig. 4.10

Se trasează o diagramă a încercării la forfecare, a cărei pantă în origine este modulul de elasticitate transversal *G*.

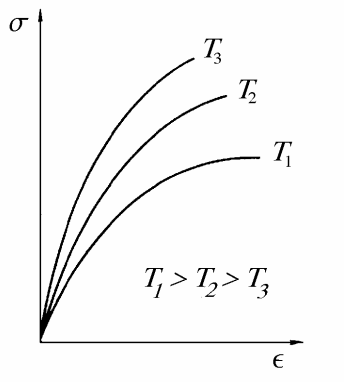


Fig. 4.11

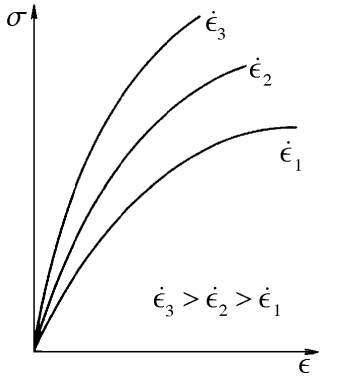


Fig. 4.12

4.5 Efectul temperaturii şi vitezei de deformare

În general, odată cu creşterea temperaturii, curba caracteristică a unui metal este mai înclinată (deci modulul de elasticitate scade) şi ajunge la tensiuni mai mici (deci limita de curgere scade) (fig. 4.11).

Creşterea vitezei de deformare $\dot{\varepsilon} = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ duce la o creştere aparentă a modulului de elasticitate şi a limitei de curgere convenționale (fig. 4.12) la multe materiale.

4.6 Rezistențe admisibile

În rezolvarea problemelor de Rezistența materialelor, după modelarea piesei sau a sistemului real şi determinarea caracteristicilor mecanice ale materialului utilizat, se pune problema precizării valorii maxime admisibile a tensiunilor din piesa studiată, denumită *rezistență admisibilă*.

Rezistența admisibilă este valoarea convențională aleasă în calcule, pe baza experienței practice, pentru tensiunea maximă care se poate produce într-o piesă, în condiții date de material, de solicitare şi de mediu ambiant.

Însă aceste condiții, în general, nu sunt cunoscute perfect. Determinarea sarcinilor este aproximativă, fiind posibilă depăşirea valorilor considerate în calcule. Există incertitudini privind condițiile de mediu ambiant, în special temperatura. Caracteristicile mecanice ale materialelor pot varia față de valorile cunoscute, iar schema de calcul poate duce la o subapreciere a nivelului real de solicitare a piesei. Aceasta impune o anumită precauție în alegerea rezistențelor admisibile, pentru a avea siguranța că, în condițiile cele mai dezavantajoase de lucru, piesa îndeplineşte funcțiile pentru care a fost proiectată: nu se rupe, nu are deformații remanente mari, este suficient de rigidă şi nu-şi pierde stabilitatea formei de echilibru.

Considerând că la materialele tenace *curgerea* reprezintă o stare limită care nu trebuie atinsă, iar la materialele fragile - *ruperea*, se aleg *coeficienții de siguranță* supraunitari la care se împarte limita de curgere σ_c, respectiv rezistența la rupere σ_r, pentru a se calcula *rezistența admisibilă* σ_a.

Rezistențele admisibile se definesc prin relațiile

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c}, \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r}, \tag{4.24}$$

unde c_c este coeficientul de siguranță față de curgere, iar c_r - coeficientul de siguranță față de rupere.

Cu cât ipotezele de calcul sunt mai apropiate de realitate, sarcinile sunt evaluate mai corect, iar proprietățile materialelor sunt cunoscute mai bine, cu atât coeficienții de siguranță se pot alege mai mici, şi - corespunzător - rezistențele admisibile se pot alege mai mari.

În domeniul construcțiilor metalice, unde se utilizează frecvent bare din oțeluri tenace, starea limită este considerată curgerea, iar rezistențele admisibile se stabilesc funcție de limita de curgere σ_c . Deobicei $\sigma_c = 250\,\text{MPa}$, dar se utilizează şi laminate cu $\sigma_c = 345\,\text{MPa}$. Normele *AISC ASD* [37] recomandă următoarele valori ale rezistențelor admisibile, în special pentru profile corniere:

a) la întindere $\sigma_{at} \le 0{,}6\,\sigma_c$;

b) la forfecare $\tau_{af} = 0{,}4\,\sigma_c$;

c) la încovoiere $\sigma_{ai} = 0{,}66\,\sigma_c$

Stabilirea valorilor rezistențelor admisibile face obiectul cursului de Organe de maşini. În problemele de Rezistența materialelor, valorile rezistențelor admisibile sunt date fără comentarii. Valori orientative sunt prezentate în *Anexa 1*.

Metoda de calcul pe baza rezistențelor admisibile este larg utilizată în construcția de maşini, unde apar frecvent probleme dinamice şi unde modelarea piesei reale este mai dificilă. La calculul construcțiilor este mai larg răspândită *metoda capacității portante* (metoda sarcinilor limită), bazată pe valori maxime admisibile ale sarcinilor exterioare aplicate structurilor.

5.
ÎNTINDEREA ŞI COMPRESIUNEA BARELOR

O bară dreaptă este solicitată la întindere (compresiune) dacă în secțiunea transversală acționează o forță axială. Atunci când în lungul barei sunt aplicate mai multe forțe, este necesară construcția diagramei forțelor axiale.

Problemele de întindere pot fi *static nedeterminate*, atunci când reacțiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai din condiții de echilibru. Ele apar la sisteme cu interacțiuni între componente cu rigidități diferite, la grinzi cu zăbrele şi poduri suspendate pe cabluri, la probleme cu dilatări împiedicate sau cu constrângeri de deplasări.

În general, pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesară utilizarea a patru tipuri de relații: 1) *ecuații de echilibru*; 2) *ecuații* care descriu geometria *deformațiilor* sau compatibilitatea între deformații specifice şi deplasări; 3) *ecuații constitutive* între tensiuni şi deformații specifice sau între forțe şi deplasări; şi 4) *condiții la limită*, de rezemare sau de solicitare pe contur. În continuare se va ilustra aplicarea acestor ecuații la probleme de întindere.

5.1 Tensiuni şi deformații la întindere

Fie bara din figura 5.1, solicitată de forța F. În secțiunea x, forța axială $N = F$. Se observă că după aplicarea forței F, secțiunea BC are o deplasare axială Δx , dar rămâne plană şi perpendiculară pe axa barei, deci ipoteza lui Bernoulli este valabilă.

Rezultă că alungirea specifică este aceeaşi în toate punctele secțiunii transversale:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} = \text{const.},$$

şi, conform legii lui Hooke

$$\sigma = E\,\varepsilon = \text{const.},$$

deci tensiunile normale produse de întindere sunt uniform distribuite pe secțiunea transversală a barei.

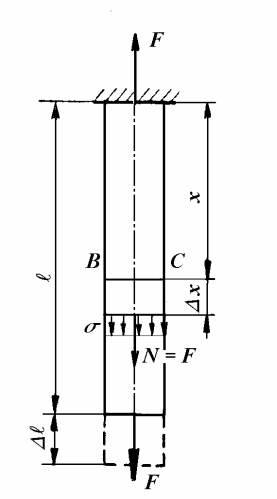


Fig. 5.1

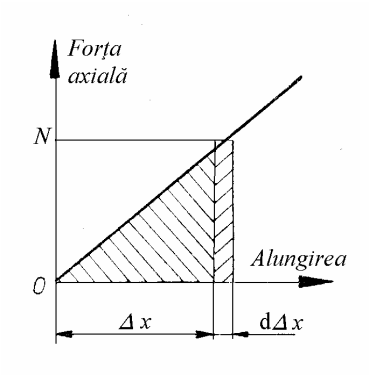


Fig. 5.2

Rezultanta forțelor elementare $\sigma\,\mathrm{d}A$ de pe toate elementele infinitezimale $\mathrm{d}A$ ale secțiunii este forța axială N:

$$N = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma \int_A \mathrm{d}A = \sigma\, A\,,$$

deci formula tensiunilor normale de întindere sau compresiune este

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \qquad (5.1)$$

Alungirea porțiunii de bară de lungime x este:

$$\Delta x = \varepsilon\, x = \frac{\sigma}{E}\, x = \frac{N\, x}{E\, A}\,,$$

care, pentru o bară de lungime ℓ, se scrie:

$$\Delta\ell = \int_\ell \frac{N\,\mathrm{d}x}{E\, A} \qquad (5.2)$$

unde produsul $E\,A$ se numeşte *modùl de rigiditate la întindere*.

Pentru tronsoane de bară la care $N = \text{const.}$ şi $E\,A = const.$, alungirea este

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{N\,\ell}{E\, A}} \qquad (5.3)$$

Relația (5.1) este utilizată sub următoarele forme:

- formula de dimensionare:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}; \qquad (5.4, a)$$

- formula de verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \le \sigma_a; \qquad (5.4, b)$$

- formula forței capabile:

$$N_{cap} = A\,\sigma_a\,. \qquad (5.4, c)$$

În relațiile (5.4), σ_a este rezistența admisibilă la întindere sau la compresiune.

5.2 Energia de deformație la întindere

Alungirea unei porțiuni de bară de lungime x este $\Delta x = \frac{N\,x}{E\,A}$, deci lucrul mecanic produs de forța axială N pe deplasarea elementară $\mathrm{d}(\Delta x)$ este

$$N\,\mathrm{d}(\Delta x) = \frac{E\,A}{x}\,\Delta x\,\mathrm{d}(\Delta x).$$

Dacă solicitarea este statică, lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare se transformă în energie potențială de deformație:

$$U = \int_0^{\Delta x} \frac{E\,A}{x}\,\Delta x\,\mathrm{d}(\Delta x) = \frac{E\,A}{x}\,\frac{(\Delta x)^2}{2} = \frac{1}{2}\,N\,\Delta x = \frac{N^2\,x}{2\,E\,A}.$$

Aceasta este egală cu aria supafeței de sub diagrama forță-alungire (fig. 5.2).

Pentru un element de bară de lungime $\mathrm{d}x$, energia de deformație este $\mathrm{d}U = \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2\,E\,A}$, deci energia înmagazinată de întreaga bară se poate scrie:

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2\,E\,A}. \qquad (5.5)$$

Pe baza relației (5.1), notând $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x$, se mai obține

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.5, a)$$

unde $U_0 = \dfrac{\sigma^2}{2E}$ este *energia de deformație specifică* (în unitatea de volum).

5.3 Sisteme static nedeterminate

La sisteme static nedeterminate (sisteme hiperstatice), reacțiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru din statică. Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesar să se stabilească patru tipuri de ecuații: de echilibru, de compatibilitate geometrică, relații forță-deformații şi condiții la limită.

5.3.1 Compatibilitatea între deplasări şi deformații

Se consideră o bară *i-j* articulată la capete (fig. 5.3), deci solicitată axial, element component al unei structuri deformabile (de ex.: grindă cu zăbrele). Bara face inițial unghiul α cu axa *X* a sistemului de referință *XOY*. Ca urmare a deformării structurii sub acțiunea sarcinilor exterioare, bara se deformează, iar capetele *i* şi *j* se deplasează în *i'* şi *j'*.

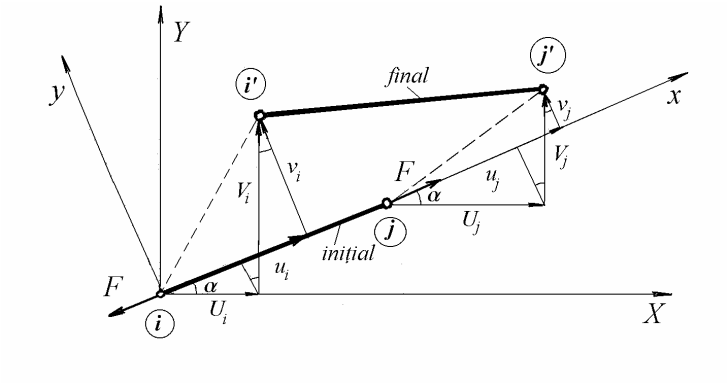


Fig. 5.3

Se notează U_i, V_i şi U_j, V_j componentele deplasărilor capetelor barei pe axele *X*, *Y*, respectiv u_i, v_i şi u_j, v_j componentele deplasărilor capetelor pe axele *x*, *y*. Între alungirea barei $\Delta\ell_{ij}$ şi deplasările capetelor barei u_i, u_j se stabileşte condiția de compatibilitate în sistemul local de coordonate *xOy*:

$$\Delta\ell_{ij} = u_j - u_i \,. \tag{5.6}$$

În general, este convenabil să se lucreze cu componentele deplasărilor în sistemul global de coordonate *XOY*. Deoarece

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \cos\alpha + V_i \sin\alpha , \\ u_j &= U_j \cos\alpha + V_j \sin\alpha , \end{aligned} \tag{5.7}$$

condiția de compatibilitate geometrică (5.6) devine

$$\Delta\ell_{ij} = \left(U_j - U_i\right)\cos\alpha + \left(V_j - V_i\right)\sin\alpha . \tag{5.8}$$

Relația (5.8) va fi utilizată în rezolvarea problemelor static nedeterminate prin metoda deplasărilor.

5.3.2 Sisteme cu restrângeri de deplasări

Barele drepte cu articulații fixe la capete, solicitate axial şi barele cu dilatări împiedicate sunt sisteme static nedeterminate

5.3.2.1 Bara cu articulații fixe la capete

Fie bara din figura 5.4, cu articulații fixe la capete, solicitată de forța *F* aplicată în secțiunea *3*. Se cer tensiunile din bară.

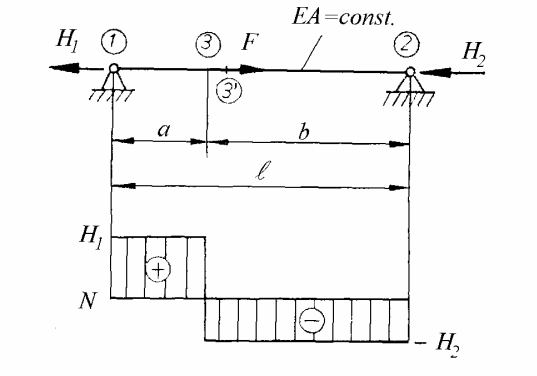


Fig. 5.4

Reacțiunile din articulații sunt H_1 şi H_2.

Ecuația de echilibru. Ecuația de proiecții pe orizontală a forțelor se scrie

$$H_1 - F + H_2 = 0 . \tag{5.9}$$

Compatibilitatea deformațiilor. În urma aplicării forței *F*, secțiunea *3* se deplasează în *3*', deci "cât se întinde porțiunea *1-3* atât se comprimă porțiunea *3-2"*

$$\Delta\ell_{13} = \left|\Delta\ell_{32}\right| . \tag{5.10}$$

Relațiile forță-deformație. Pe baza legii lui Hooke s-a stabilit expresia (5.3) a alungirilor care, pentru cele două porțiuni de bară, se scrie

$$\Delta\ell_{13} = \frac{N_{13}\, a}{E\, A}, \quad \Delta\ell_{32} = \frac{N_{32}\, b}{E\, A} \quad . \tag{5.11}$$

Din diagrama forțelor axiale rezultă

$$N_{13} = H_1 , \qquad N_{32} = H_1 - F = -H_2 . \tag{5.12}$$

Din relațiile (5.10)-(5.12) se obțin valorile reacțiunilor

$$H_1 = F\frac{b}{\ell}, \qquad H_2 = F\frac{a}{\ell}, \tag{5.13}$$

deci tensiunile din bară au expresiile

$$\sigma_{13} = \frac{N_{13}}{A} = \frac{F\, b}{A\, \ell}, \qquad \sigma_{32} = \frac{N_{32}}{A} = -\frac{F\, a}{A\, \ell} . \tag{5.14}$$

Tensiunile pozitive sunt de întindere iar cele negative sunt de compresiune.

5.3.2.2 Tensiuni termice

Într-o bară de secțiune constantă, articulată sau încastrată la capete (fig. 5.5, a), încălzită uniform (pentru evitarea încovoierii) cu Δt (grade), apar tensiuni de compresiune datorită împiedicării dilatării.

Dacă bara ar fi liberă la capete, datorită încălzirii s-ar dilata liber, alungindu-se cu

$$\Delta\ell = \ell\, \alpha\, \Delta t , \tag{5.15}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului barei.

Împiedicarea dilatării este echivalentă cu aplicarea unei forțe de compresiune *N*, care readuce bara la lungimea inițială, deci o comprimă cu

$$\Delta\ell = -\frac{N\, \ell}{E\, A} . \tag{5.16}$$

Egalând expresiile (5.15) şi (5.16) rezultă

$$\ell\, \alpha\, \Delta t = -\frac{N\, \ell}{E\, A} ,$$

de unde se obține formula tensiunilor termice produse de dilatarea împiedicată

$$\sigma = \frac{N}{A} = -E\,\alpha\,\Delta t \qquad (5.17)$$

care în acest caz nu depind de aria suprafeței secțiunii transversale.

La bara cu secțiunea variabilă în trepte din figura 5.6, încălzită uniform cu diferența de temperatură Δt, un raționament analog conduce la condiția

$$(\ell_1 + \ell_2)\alpha\,\Delta t = -\frac{N\,\ell_1}{E\,A_1} - \frac{N\,\ell_2}{E\,A_2},$$

deci tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 + \frac{A_1}{A_2}\ell_2} E\,\alpha\,\Delta t\,;\ \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2 + \frac{A_2}{A_1}\ell_1} E\,\alpha\,\Delta t\,.$$

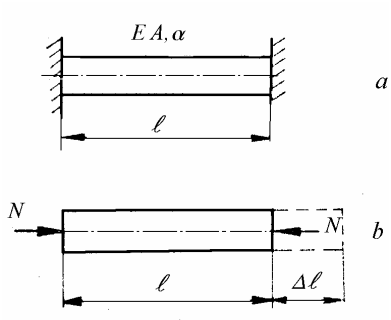


Fig. 5.5

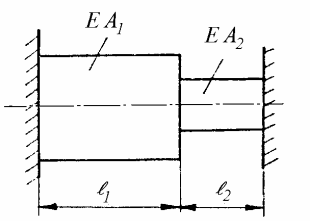


Fig. 5.6

5.3.3 Interacțiunea între componente cu rigidități diferite

În continuare se vor da exemple de probleme static nedeterminate pentru sisteme cu elemente componente de rigidități diferite. Primele două probleme vor fi rezolvate prin *metoda forțelor*, în care necunoscutele sunt reacțiuni sau forțe în bare. Următoarele două probleme se vor rezolva prin *metoda deplasărilor*, în care necunoscutele primare sunt deplasări, forțele din bare şi tensiunile fiind calculate ulterior.

5.3.3.1 Bara cu secțiune eterogenă

Se cer tensiunile produse de forța F în bara din figura 5.7, compusă din două materiale diferite (ex.: stâlp din beton armat, cablu de aluminiu cu inimă de oțel etc.), desenate separat pentru simplificarea expunerii. Se cunosc modulele de rigiditate la întindere $E_1 A_1$ şi $E_2 A_2$.

Rezolvare

Ecuația de echilibru. Forța exterioară F este preluată în proporții diferite de cele două materiale. Suma forțelor axiale N_1 şi N_2 egalează forța totală:

$$N_1 + N_2 = F\,. \tag{5.18}$$

Compatibilitatea deformațiilor. Cele două materiale, cu aceeaşi lungime inițială ℓ, au deformații identice, fiind solidarizate între ele:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2\,. \tag{5.19}$$

Relațiile forță-deformație. Pe baza legii lui Hooke, s-a stabilit expresia (5.3) a alungirilor, care pentru cele două materiale se scrie

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\,\ell}{E_1 A_1}, \qquad \Delta\ell_2 = \frac{N_2\,\ell}{E_2 A_2}\,. \tag{5.20}$$

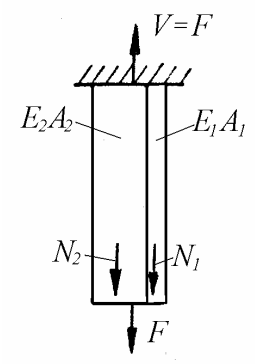


Fig. 5.7

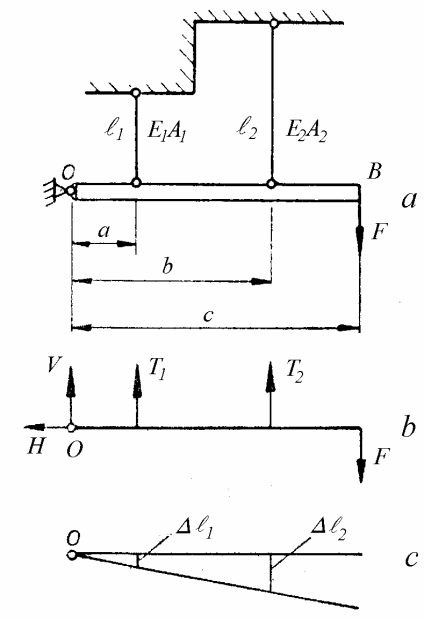


Fig. 5.8

Înlocuind relațiile (5.20) în (5.19) şi utilizând ecuația (5.18) se obține

$$\frac{N_1\,\ell}{E_1 A_1} = \frac{N_2\,\ell}{E_2 A_2} = \frac{N_1 + N_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\,.$$

Rezultă tensiunile în cele două materiale

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{A_1 + \dfrac{E_2}{E_1} A_2}\,;\ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{A_2 + \dfrac{E_1}{E_2} A_1}\,. \tag{5.21}$$

Dacă se cunosc rezistenţele admisibile la întindere ale celor două materiale σ_{a1}, σ_{a2} şi se cere forţa capabilă de întindere, se calculează

$$F' = \sigma_{a1}\left(A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2\right);\ \ F'' = \sigma_{a2}\left(A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1\right)$$

şi se alege F_{cap} egală cu cea mai mică dintre cele două valori F' şi F''.

5.3.3.2 Sistem de bare paralele

Se consideră o bară rigidă *OB* (fig. 5.8, *a*) suspendată de două bare elastice (tiranţi) şi articulată în *O*. Se cer tensiunile în barele verticale articulate la capete.

Ecuaţia de echilibru. Izolând bara rigidă şi evidenţiind forţele care acţionează asupra ei (fig. 5.8, *b*), se scrie ecuaţia de momente faţă de punctul *O* :

$$T_1\, a + T_2\, b = F\, c\,. \tag{5.22}$$

Compatibilitatea deformaţiilor. Ecuaţia deformaţiilor se scrie pe baza condiţiei ca, după aplicarea forţei *F,* bara rigidă *OB* să rămână rectilinie (fig. 5.8, *c*) când barele verticale se alungesc:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{a}{b}\,. \tag{5.23}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pentru cele două bare verticale, ecuaţia (5.3) se scrie

$$\Delta\ell_1 = \frac{T_1\,\ell_1}{E_1 A_1}\ ,\quad \Delta\ell_2 = \frac{T_2\,\ell_2}{E_2 A_2}\,. \tag{5.24}$$

Înlocuind relaţiile (5.24) în (5.23) şi utilizând ecuaţia (5.22) se obţin întâi forţele T_1 şi T_2, apoi se calculează tensiunile în bare:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{T_1}{A_1} = \frac{F}{\dfrac{b^2}{a\,c}\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\dfrac{E_2}{E_1} A_2 + \dfrac{a}{c} A_1}\,;\\
\sigma_2 &= \frac{T_2}{A_2} = \frac{F}{\dfrac{a^2}{b\,c}\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\dfrac{E_1}{E_2} A_1 + \dfrac{b}{c} A_2}\,.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

5.3.3.3 Sistem de bare concurente

La sistemul din figura 5.9, compus din trei bare concurente articulate la capete, se cer forțele din bare şi deplasarea punctului de aplicare a forței F.

Pentru simplificarea rezolvării, se descompune forța F în două componente, una orizontală, $F_1 = F\sin\alpha$ şi şi una verticală, $F_2 = F\cos\alpha$. Se consideră că deplasarea oblică δ a punctului *4* are componentele δ_1 şi δ_2 pe direcțiile forțelor cu acelaşi indice.

Ecuațiile de echilibru. Se scriu ecuațiile de proiecții ale forțelor care acționează asupra articulației *4* :

$$\begin{aligned} &T_1\sin\theta - T_3\sin\theta = F_1\,,\\ &T_1\cos\theta + T_2 + T_3\cos\theta = F_2\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ecuațiile de compatibilitate geometrică. Pentru cele trei bare, ținând cont de *condițiile la limită* în punctele fixe *1*, *2* şi *3*, relațiile între deformații şi deplasări (5.8) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\Delta\ell_{14} = \delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\,,\\ &\Delta\ell_{24} = \delta_2\,,\\ &\Delta\ell_{34} = -\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Relațiile forță-deformație. Pentru cele trei bare, ecuația (5.3) se scrie

$$\Delta\ell_{14} = \frac{T_1\,\ell}{E\,A}\,,\qquad \Delta\ell_{24} = \frac{T_2\,\ell\cos\theta}{E\,A}\,,\qquad \Delta\ell_{34} = \frac{T_3\,\ell}{E\,A}\,. \tag{5.28}$$

Înlocuind relațiile (5.28) în (5.27), se obțin relațiile între eforturi şi deplasări

$$\begin{aligned} &T_1 = \frac{E\,A}{\ell}\left(\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\right),\\ &T_2 = \frac{E\,A}{\ell\cos\theta}\,\delta_2\,,\\ &T_3 = \frac{E\,A}{\ell}\left(-\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\right), \end{aligned} \tag{5.29}$$

care, înlocuite în (5.26), permit calculul componentelor deplasării punctului *4* din relațiile

$$\begin{aligned} &\frac{2\,E\,A}{\ell}\sin^2\theta\cdot\delta_1 = F_1\,,\\ &\frac{E\,A}{\ell}\left(2\cos^2\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)\delta_2 = F_2\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Înlocuind componentele deplasării din relaţiile (5.30) în ecuaţiile (5.29) se obţin forţele din bare, apoi, prin împărţire la aria secţiunii tranversale, tensiunile.

Se observă că deplasarea δ a punctului de aplicare al forţei F nu are loc pe direcţia forţei, deoarece forţa F nu este aplicată în lungul unei direcţii principale de rigiditate a sistemului.

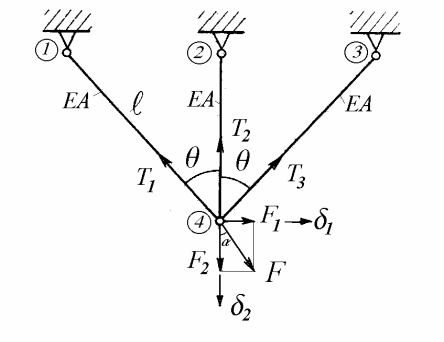


Fig. 5.9

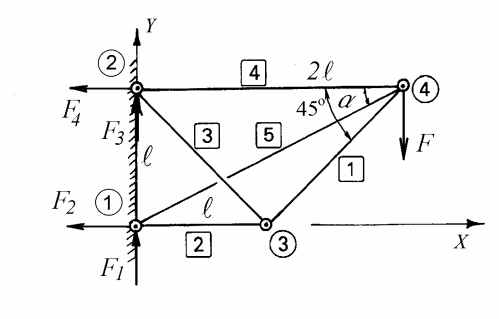
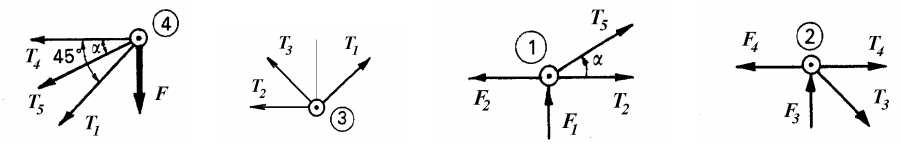


Fig. 5.10

5.3.3.4 Sistem de bare articulate la capete

Grinda cu zăbrele din figura 5.10 are articulaţii fixe în punctele *1* şi *2*. Se cer eforturile axiale din bare şi deplasarea punctului de aplicaţie a forţei. Barele au acelaşi modul de rigiditate la întindere $E\,A$.

Din geometria figurii rezultă $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ şi $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$. Se notează $F_1,...,F_4$ componentele reacţiunilor din articulaţiile fixe şi $T_1,...,T_5$ forţele din bare.



a *b* *c* *d*

Fig. 5.11

Ecuaţiile de echilibru. Se izolează fiecare articulaţie şi se scriu ecuaţiile de proiecţii ale forţelor care acţionează asupra "nodului" respectiv.

Pentru nodul *4* (fig. 5.11, *a*) se obţine

$$\begin{aligned} &T_4 + T_5\,2/\sqrt{5} + T_1/\sqrt{2} = 0, \\ &F + T_1/\sqrt{2} + T_5/\sqrt{5} = 0. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Pentru nodul *3* (fig. 5.11, *b*)

$$\begin{aligned} &T_2 + T_3/\sqrt{2} - T_1/\sqrt{2} = 0, \\ &T_1/\sqrt{2} + T_3/\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Pentru nodul *1* (fig. 5.11, *c*)

$$\begin{aligned} &T_2 + T_5\, 2/\sqrt{5} - F_2 = 0, \\ &T_5/\sqrt{5} + F_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Pentru nodul *2* (fig. 5.11, *d*)

$$\begin{aligned} &T_4 + T_3/\sqrt{2} - F_4 = 0, \\ &F_3 - T_3/\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Cele 8 ecuații de echilibru (5.31)-(5.34) conțin 9 necunoscute. Sistemul este static nedeterminat. Rezolvarea se va face prin metoda deplasărilor.

Ecuațiile de compatibilitate geometrică. Pentru cele cinci bare, relația între deformații şi deplasări (5.8) se scrie sub forma

$$\Delta\ell_{34} = (U_4 - U_3)\cos 45^{\circ} + (V_4 - V_3)\sin 45^{\circ}, \tag{5.35}$$

$$\Delta\ell_{23} = (U_3 - U_2)\cos 135^{\circ} + (V_3 - V_2)\sin 135^{0}, \tag{5.36}$$

$$\Delta\ell_{14} = (U_4 - U_1)\frac{2}{\sqrt{5}} + (V_4 - V_1)\frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{5.37}$$

$$\Delta\ell_{13} = U_3 - U_1\ , \tag{5.38}$$

$$\Delta\ell_{24} = U_4 - U_2, \tag{5.39}$$

unde $U_i, V_i\ \ (i = 1,...,4)$ sunt componentele (orizontală şi verticală ale) deplasărilor nodurilor în sistemul de coordonate globale *XOY*.

Condițiile la limită. În articulațiile fixe

$$U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0, \tag{5.40}$$

ceea ce simplifică relațiile (5.35)-(5.39).

Relațiile forță-alungire. Pentru cele cinci bare, ecuația (5.3) se scrie

$$\Delta\ell_{34} = \frac{T_1\sqrt{2}\,\ell}{EA}\ , \qquad \Delta\ell_{13} = \frac{T_2\,\ell}{EA}, \qquad \Delta\ell_{23} = \frac{T_3\sqrt{2}\,\ell}{EA}.$$

$$\Delta\ell_{24} = \frac{T_4\,2\,\ell}{EA}, \qquad \Delta\ell_{14} = \frac{T_5\sqrt{5}\,\ell}{EA}. \tag{5.41}$$

Ecuaţiile (5.31)-(5.41) formează un sistem liniar de 22 ecuaţii cu 22 necunoscute. Dacă se ţine cont de condiţiile la limită şi se elimină alungirile, rămân două grupuri decuplate de câte patru ecuaţii.

Se calculează întâi deplasările

$$U_3 = -1{,}33\,\frac{F\,\ell}{E\,A}\,,\; V_3 = -3{,}21\,\frac{F\,\ell}{E\,A}\,,\; U_4 = 2{,}67\,\frac{F\,\ell}{E\,A}\,,\; V_4 = -9{,}09\,\frac{F\,\ell}{E\,A}\,,$$

apoi reacţiunile

$$F_1 = 0{,}335\,F\,,\; F_2 = -2\,F\,,\; F_3 = 0{,}665\,F\,,\; F_4 = 2\,F\,. \qquad (5.42)$$

Înlocuind valorile reacţiunilor (5.42) în ecuaţiile de echilibru, se obţin forţele axiale din bare, egale şi de sens contrar forţelor care acţionează asupra nodurilor.

5.4 Concentrarea tensiunilor

Calculul la întindere, bazat pe relaţia (5.1), este valabil numai pentru bare de secţiune constantă, deci care respectă ipoteza constanţei secţiunii transversale.

Discontinuităţile geometrice, de exemplu, variaţii în trepte ale secţiunii transversale (reducţii), găuri transversale, crestături, şanţuri sau scobituri laterale, produc variaţii locale importante ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât tensiunea medie în secţiunea transversală netă a barei. Acest fenomen este denumit *concentrarea tensiunilor* iar discontinuitatea geometrică respectivă se numeşte *concentrator de tensiuni*.

La un concentrator de tensiuni, tensiunea maximă este funcţie de forma şi dimensiunile piesei în vecinătatea discontinuităţii.

Se defineşte *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice* K_t prin relaţia

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \qquad (5.43)$$

unde σ_{max} este tensiunea maximă la discontinuitatea geometrică şi σ_{nom} este tensiunea medie în secţiunea transversală respectivă. Acest factor este constant în domeniul comportării elastice a materialului.

În literatura tehnică (Peterson [48], Neuber [45], Frocht [24], Pilkey [52]) se dau diagrame ale factorului K_t în funcţie de dimensiunile concentratorului. Ele se bazează fie pe soluţii analitice din Teoria elasticităţii sau soluţii numerice prin Metoda elementelor finite, fie pe determinări experimentale cu ajutorul fotoelasticimetriei.

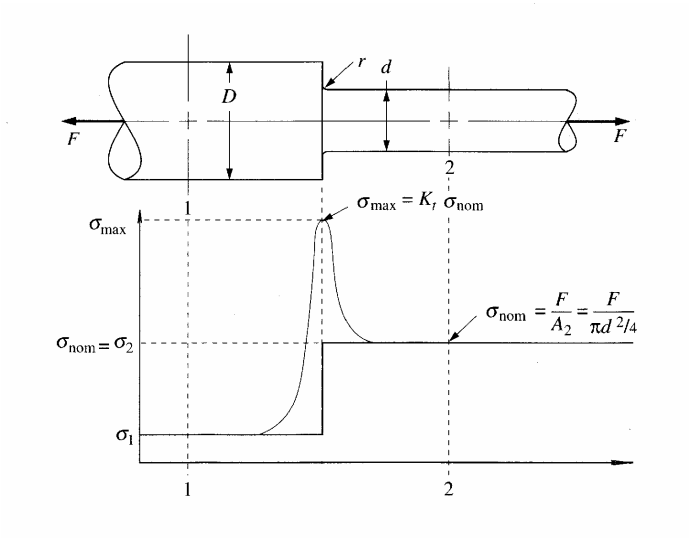


Fig. 5.12 [43]

Pentru o bară solicitată la întindere, cu secțiune variabilă în trepte, creşterea locală a tensiunilor datorită saltului de diametru este redată în figura 5.12.

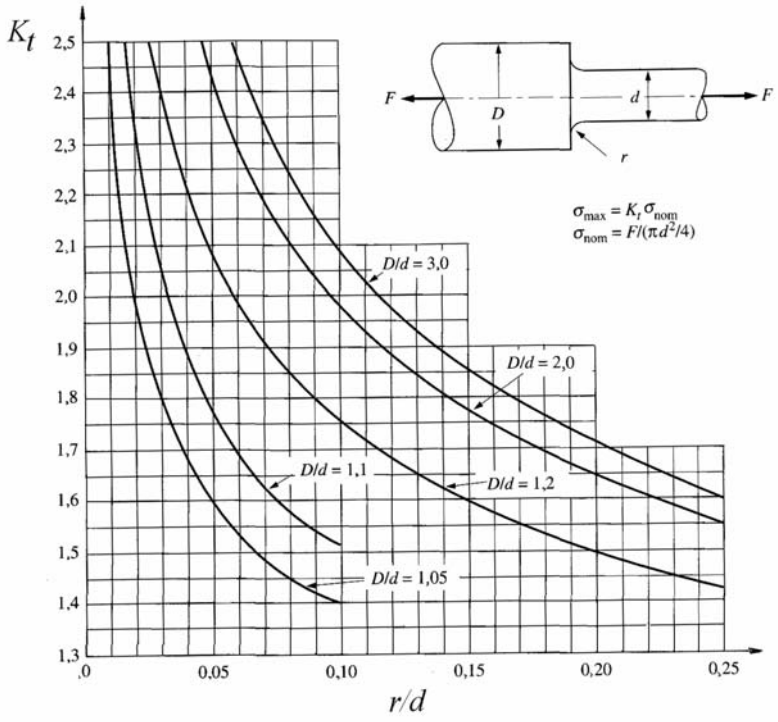
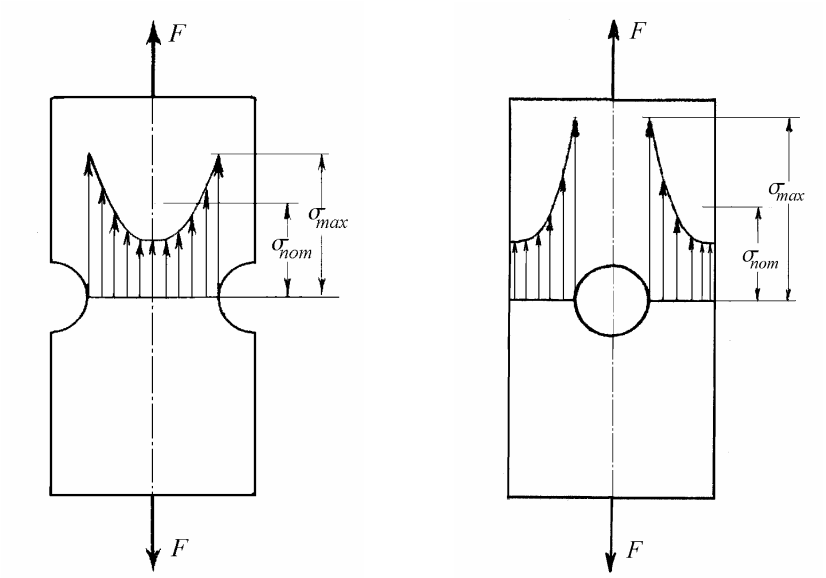


Fig. 5.13 [43]

Variația factorului teoretic de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 5.13, pentru cinci valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni. Se remarcă valori $K_t = 1{,}4...2{,}5.$ Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

Distribuția tensiunilor axiale pentru o bară cu degajări laterale semicirculare este ilustrată în figura 5.14, *a* iar pentru o bară cu gaură circulară transversală - în figura 5.14, *b* (G. Kirsch, 1898).



a *b*

Fig. 5.14

La bara cu gaură transversală (fig. 5.14, *b*), fie $\sigma_1 = \dfrac{F}{A_1}$ tensiunile normale uniform distribuite pe o secțiune de arie A_1 situată la o anumită distanță de discontinuitate. În secțiunea din dreptul găurii, de arie $A_2 < A_1$, *tensiunea nominală* este tensiunea medie $\sigma_2 = \sigma_1 \dfrac{A_1}{A_2} > \sigma_1$.

Se observă însă că în peretele găurii apar tensiuni σ_{max} mult mai mari decât tensiunea medie, $\sigma_{max} = K_t\, \sigma_{nom}$, unde $K_t = 2{,}...3$, deoarece în vecinătatea găurii starea de tensiuni nu mai este liniară. Apare un *gradient de tensiune*, o variație locală bruscă a tensiunilor, care scad de la valoarea maximă la nivelul

găurii, la o valoare inferioară tensiunii nominale, la marginea barei (ariile de sub diagramele tensiunilor sunt egale).

La verificarea unei piese, se calculează întâi $\sigma_{nom} = \frac{N}{A}$ pe baza ariei nete a barei în dreptul concentratorului, se evaluează apoi din diagrame factorul K_t pe baza elementelor geometrice ale concentratorului şi se calculează tensiunea maximă σ_{max} care în final este comparată cu rezistența admisibilă σ_a.

5.5 Tensiuni pe o suprafață înclinată față de axa barei

Fie o bară solicitată la întindere (fig. 5.15) secționată cu un plan BC înclinat cu unghiul α față de secțiunea transversală A.

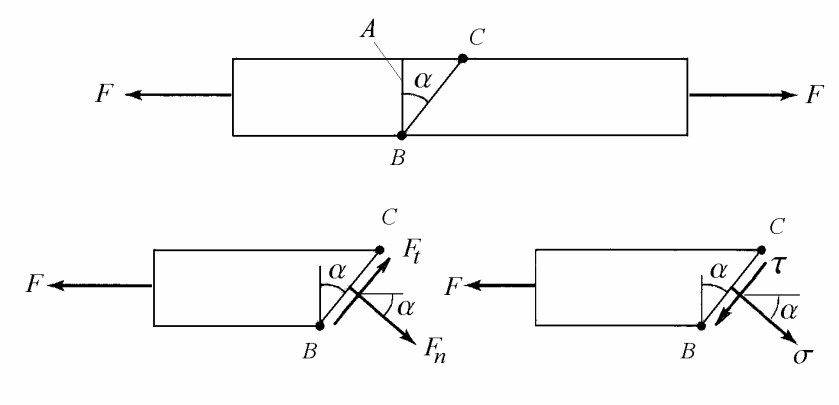


Fig. 5.15

Forța interioară din secțiunea înclinată poate fi descompusă în două componente, una normală F_n şi una tangențială F_t, în raport cu planul BC:

$$F_n = F\cos\alpha\,, \quad F_t = F\sin\alpha\,.$$

Aceste componente produc tensiuni normale σ şi tensiuni tangențiale τ ale căror valori se obțin împărțind forța respectivă la aria secțiunii înclinate $A\sec\alpha$:

$$\sigma = \frac{F_n}{A\sec\alpha} = \frac{F\cos\alpha}{A\sec\alpha} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha\,,$$

$$\tau = -\frac{F_t}{A\sec\alpha} = -\frac{F\sin\alpha}{A\sec\alpha} = -\frac{F}{A}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Înlocuind $F/A = \sigma_x$, rezultă

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha\,, \tag{5.44}$$

$$-\tau = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha\,. \tag{5.45}$$

Din relația (5.44) se observă că, atunci când $\alpha = 0$, σ are valoarea maximă σ_x iar când $\alpha = 90^0$, $\sigma = 0$, deci în bară nu există tensiuni normale transversale.

Din relația (5.45) rezultă că τ este maxim când $\sin 2\alpha$ este maxim, deci atunci când $2\alpha = 90^0$ şi 270^0, sau când $\alpha = 45^0$ şi 135^0.

Rezultatul se confirmă în practică. La materiale a căror rezistență la forfecare este mai mică decât jumătate din rezistența de rupere la tracțiune, încărcarea la întindere monoaxială produce ruperi la 45^0, în lungul planelor pe care acționează tensiuni tangențiale maxime. Astfel epruvetele de fontă solicitate la compresiune se fisurează la 45^0 față de direcția de aplicare a sarcinii.

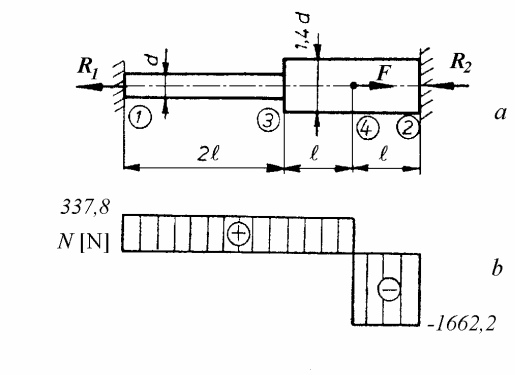


Fig. 5.16

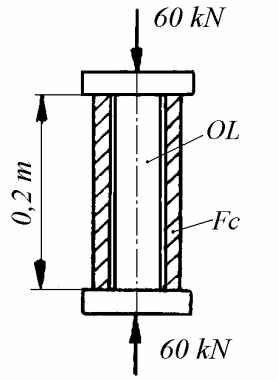


Fig. 5.17

Exemplul 5.1

Să se calculeze tensiunile normale în bara din figura 5.16, *a,* cu diametrul $d = 5$ mm, solicitată axial de o forță $F = 2$ kN.

Rezolvare

Ecuația de proiecții a forțelor pe orizontală este

$$R_1 + R_2 - F = 0\,.$$

Condiția de deformație se scrie

$$\frac{R_1\, 2\ell}{E\, A_1} + \frac{R_1\, \ell}{E\, A_2} = \frac{R_2\, \ell}{E\, A_2}, \tag{5.46}$$

unde suprafețele secțiunilor transversale ale celor două tronsoane au ariile

$$A_1 = \frac{\pi\, d^2}{4} = 19{,}62\ \text{mm}^2,\ A_2 = \frac{\pi (1{,}4\, d)^2}{4} = 38{,}47\ \text{mm}^2.$$

După simplificări, ecuația (5.46) devine

$$R_2 = 4{,}92\, R_1,$$

deci reacțiunile au valorile

$$R_1 = \frac{F}{5{,}92} = \frac{2000}{5{,}92} = 337{,}8\ \text{N},\ R_2 = 4{,}92\, R_1 = 1662{,}2\ \text{N}.$$

Diagrama forțelor axiale este redată în figura 5.16, *b*.

Tensiunile au valorile

$$\sigma_{13} = \frac{N_{13}}{A_1} = \frac{337{,}8}{19{,}62} = 17{,}2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = \frac{337{,}8}{38{,}47} = 8{,}78\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{42} = \frac{N_{42}}{A_2} = -\frac{1662{,}2}{38{,}47} = -43{,}2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Deoarece bara are secțiune variabilă, într-o aplicație concretă trebuie să se țină cont de concentrarea de tensiuni la saltul de diametru în secțiunea *3*.

Exemplul 5.2

Un suport format dintr-o tijă de oțel introdusă într-un manșon din fontă, este comprimat axial cu o forță de 60 kN (fig. 5.17). Cunoscând lungimea barei $\ell = 0{,}2$ m, aria secțiunii transversale a tijei $A_{OL} = 200$ mm^2, aria secțiunii manșonului $A_{Fc} = 800$ mm^2 și modulele de elasticitate $E_{OL} = 210$ GPa și $E_{Fc} = 120$ GPa, să se calculeze tensiunile care apar în tijă, respectiv manșon, alungirea totală $\Delta\ell$ și fracțiunile din efortul N preluate de tijă, respectiv manșon.

Rezolvare

Tensiunile se calculează cu relațiile (5.21)

$$\sigma_{OL} = \frac{N}{A_{OL} + \dfrac{E_{Fc}}{E_{OL}} A_{Fc}} = \frac{60 \cdot 10^3}{200 + \dfrac{1{,}2}{2{,}1} 800} = 91{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{Fc} = \frac{N}{A_{Fc} + \dfrac{E_{OL}}{E_{Fc}} A_{OL}} = \frac{60 \cdot 10^3}{800 + \dfrac{2{,}1}{1{,}2} 200} = 52{,}18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Alungirea totală este

$$\Delta\ell = \frac{N\,\ell}{E_{OL}\,A_{OL} + E_{Fc}\,A_{Fc}} = \frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 200}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 200 + 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 800} = -0{,}0869 \text{ mm}.$$

Eforturile preluate de cele două piese sunt

$$N_{OL} = \sigma_{OL}\,A_{OL} = 91{,}3 \cdot 200 = 18260 \text{ N} = 18{,}26 \text{ kN},$$

$$N_{Fc} = \sigma_{Fc}\,A_{Fc} = 52{,}18 \cdot 800 = 41744 \text{ N} = 41{,}74 \text{ kN}.$$

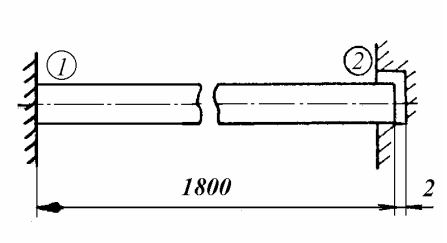


Fig. 5.18

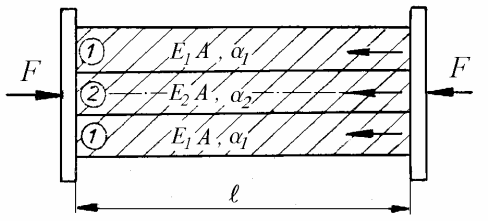


Fig. 5.19

Exemplul 5.3

O bară din cupru, având lungimea $\ell = 1{,}8$ m, este încastrată la extremitatea *1*, iar extremitatea *2* se poate deplasa liber 2 mm pe orizontală, după care deplasarea este împiedicată (fig. 5.18). Cunoscând coeficientul de dilatare termică liniară al cuprului $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1} şi modulul de elasticitate longitudinal $E = 130$ GPa, să se determine tensiunile care apar în bară la o creştere a temperaturii cu 80^{o}C.

Rezolvare

Se determină întâi variaţia de temperatură Δt_1 pentru care bara se dilată liber cei 2 mm :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta\ell}{\alpha\,\ell} = \frac{2}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 1800} = 65{,}3^0 C.$$

La încălzirea în continuare a barei cu $\Delta t_2 = 80 - 65{,}3 = 14{,}7^0 C$, dilatarea este împiedicată, în bară dezvoltându-se tensiunile (5.17)

$$\sigma = -E\,\alpha\,\Delta t_2 = -1{,}3\cdot 10^5 \cdot 17\cdot 10^{-6}\cdot 14{,}7 = -32{,}49\ \text{N/mm}^2 .$$

Exemplul 5.4

Ansamblul simetric din figura 5.19 este compus din trei bare având fiecare secțiunea transversală *A*, modulele de elasticitate E_1 şi $E_2 > E_1$, şi coeficienții de dilatare termică liniară α_1 şi $\alpha_2 < \alpha_1$. Sub acțiunea forței *F*, în bare apar tensiuni de compresiune neegale. Se cere să se calculeze creşterea temperaturii Δt prin care se realizează egalizarea tensiunilor în bare.

Rezolvare

Etapa I. Fie σ_1 şi σ_2 tensiunile în barele *1* şi, respectiv *2*. Condiția de echivalență între forțe şi tensiuni se scrie

$$-F = 2\,A\,\sigma_1 + A\,\sigma_2 .$$

Rezultă o primă relație între tensiuni

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{F}{A},$$

iar din condiția de deformație $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2}$, o a doua relație între tensiuni

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1}\sigma_1 \ .$$

Se obțin tensiunile produse de forța *F :*

$$\sigma_1 = -\frac{F\,E_1}{A\left(2E_1 + E_2\right)}\ ,\ \sigma_2 = -\frac{F\,E_2}{A\left(2E_1 + E_2\right)},\ \left|\sigma_1\right| < \left|\sigma_2\right| .$$

Etapa a IIa. Condiția de deformație în cazul dilatării împiedicate

$$\ell\,\alpha_1\,\Delta t - \frac{N\,\ell}{E_1 2A} = \ell\,\alpha_2\,\Delta t + \frac{N\,\ell}{E_2\,A},$$

unde *N* este forța axială de interacțiune între bara centrală şi barele laterale, se mai scrie sub forma

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\Delta t = -\frac{\sigma_1^*}{E_1} - \frac{\sigma_2^*}{E_2}.$$

Se adaugă relația între forța axială şi tensiunile în etapa a doua

$$\left|\sigma_1^*\, 2A\right| = \sigma_2^* A = N\,,$$

de unde rezultă şi semnificaţia tensiunilor notate cu steluţă.

Rezultă tensiunile termice

$$\left|\sigma_1^*\right| = \frac{\Delta t\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) E_1\, E_2}{2E_1 + E_2}\ ,\ \sigma_2^* = \frac{2\,\Delta t\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) E_1\, E_2}{2E_1 + E_2}\ .$$

Prin suprapunerea efectelor, suma tensiunilor în cele două stări trebuie să fie aceeaşi

$$\sigma_1 - \sigma_1^* = \sigma_2 + \sigma_2^*,$$

$$-\frac{F\, E_1}{A\left(2E_1 + E_2\right)} - \frac{\Delta t\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) E_1\, E_2}{2E_1 + E_2} = -\frac{F\, E_2}{A\left(2E_1 + E_2\right)} + \frac{2\,\Delta t\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) E_1\, E_2}{2E_1 + E_2}\ .$$

Rezultă creşterea necesară a temperaturii pentru egalizarea tensiunilor

$$\Delta t = \frac{F\left(E_2 - E_1\right)}{3\,A\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) E_1\, E_2}.$$

Exemplul 5.5

Un şurub de oţel cu diametrul $\delta = 10$ mm şi pasul filetului $h = 1{,}6$ mm este introdus într-un tub de cupru cu $d = 12$ mm, $D = 18$ mm şi fixat cu o piuliţă fără strângere (Fig. 5.20). Lungimea părţii active a şurubului este $l = 100$ mm. Să se calculeze tensiunile produse prin strângerea piuliţei cu o cheie şi rotirea 90^0 (un sfert de rotaţie). Se cunosc modulele de elasticitate la oţel $E_1 = 208$ GPa şi la cupru $E_2 = 100$ GPa.

Rezolvare

La strângerea piuliţei, tubul este comprimat şi şurubul este întins, cu forţe egale şi de sens contrar X_1. Tubul este comprimat cu Δl_2 iar şurubul este întins cu Δl_1. Prin rotirea piuliţei, şurubul se scurtează cu *nh*, unde *n* este numărul de rotaţii complete. Alungirea şurubului însumată cu scurtarea tubului egalează modificarea lungimii şurubului prin strângerea piuliţei, egală cu numărul de rotiri ale piuliţei înmulţit cu pasul filetului. Condiţia de deformaţie se scrie

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = nh$$

sau, deoarece $nh << l$,

$$\frac{X_1 l}{E_1 A_1} + \frac{X_1 l}{E_2 A_2} = nh\,.$$

unde

$$A_1 = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}54 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{\pi\left(18^2 - 12^2\right)}{4} = 141{,}37 \text{ mm}^2.$$

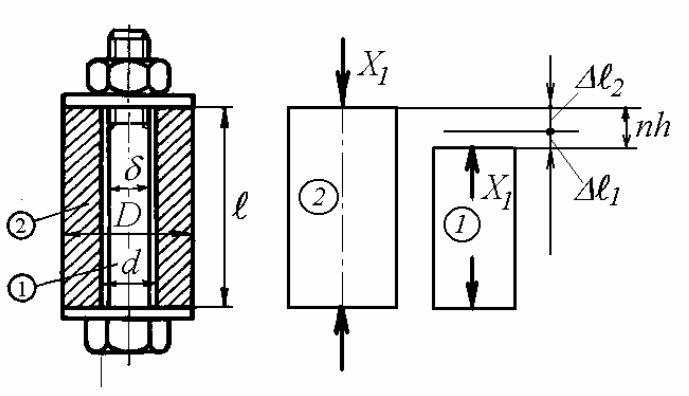


Fig. 5.20

Rezultă forța axială

$$X_1 = \frac{nh}{\left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}\right) l} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 1{,}6}{\left(\frac{1}{2{,}08 \cdot 10^5 \cdot 78{,}54} + \frac{1}{10^5 \cdot 141{,}37}\right) \cdot 100} = 30316 \text{ N}.$$

Tensiunile din şurub sunt

$$\sigma_1 = \frac{X_1}{A_1} = \frac{30316}{78{,}54} = 386 \text{ MPa}.$$

Tensiunile din tub sunt

$$\sigma_2 = -\frac{X_1}{A_2} = -\frac{30316}{141{,}37} = -214{,}5 \text{ MPa}.$$

6.
RĂSUCIREA BARELOR

O bară dreaptă este solicitată la răsucire (torsiune) dacă în secțiunea transversală acționează un moment al cărui vector este dirijat în lungul axei barei. La bare curbe, răsucirea este produsă de un moment dirijat în lungul tangentei la axa barei.

Piese tipice solicitate la răsucire sunt arborii mașinilor, arborii cutiilor de viteze, elementele elastice de tip bară de torsiune din suspensiile automobilelor şi tancurilor, precum şi barele structurilor spațiale cu capetele încastrate.

Studiul răsucirii este simplificat la bare cu secțiune axial-simetrică, la care este valabilă ipoteza secțiunii plane şi la bare cu pereți subțiri, la care se consideră că tensiunile tangențiale sunt constante pe grosimea peretelui.

La bare cu secțiune plină de formă oarecare, secțiunea transversală se deplanează iar studiul tensiunilor şi deplasărilor se face cu metodele Teoriei elasticității. Împiedicarea deplanării produce tensiuni axiale suplimentare.

La răsucirea barelor cu pereți subțiri se adoptă ipoteza invariabilității secțiunii transversale. În general, barele cu profil deschis sunt mai puțin rigide decât barele similare cu profil închis.

6.1 Calculul momentului de răsucire

Atunci când asupra unei bare acționează mai multe cupluri exterioare, având vectorul dirijat în lungul axei barei, este necesară construcția unei diagrame de momente de răsucire (fig. 2.15).

În unele aplicații se dau puterea transmisă şi turația unui arbore, pe baza cărora trebuie calculat momentul de răsucire.

Dacă un arbore transmite puterea P (kW) la turația n (rot/min), momentul de răsucire se calculează cu relația

$$M_t = 9550\frac{P}{n} \quad [\text{Nm}].$$

Dacă se cunoaşte puterea N (CP) şi turația n (rot/min), atunci

$$M_t = 7026\frac{N}{n} \quad [\text{Nm}].$$

Relațiile de mai sus se bazează pe formula puterii în mişcarea de rotație:

Puterea = Cuplul × Viteza unghiulară

deci

$$M_t\,[\text{Nm}] = \frac{puterea\ [\text{W}]}{viteza\ unghiulară\ [\text{rad/s}]} = \frac{1000 \cdot puterea\ [\text{kW}]}{\frac{\pi}{30} \cdot turatia\ [\text{rot/min}]} = \frac{30\,000}{\pi} \cdot \frac{P}{n}.$$

Deoarece

$$1\,\text{CP} = 75\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 75 \cdot 9{,}81\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \approx 736\ \text{W} = 0{,}736\ \text{kW},$$

$$P\ [\text{kW}] = 0{,}736 \cdot N\,[\text{CP}]$$

şi deci rezultă

$$M_t\,[\text{Nm}] = \frac{30}{\pi}\ \frac{P\ [\text{W}]}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot 75 \cdot 9{,}81\frac{N\ [\text{CP}]}{n} = 7025{,}895\frac{N}{n} \cong 7026\frac{N}{n}.$$

6.2 Tensiuni în bare cu secțiune axial-simetrică

Se constată că dacă pe suprafața cilindrică a unei bare se trasează generatoare şi cercuri paralele, formând o rețea de pătrate curbilinii (fig. 6.1, *a*), după solicitarea barei la răsucire (fig. 6.1, *b*) pătratele devin romburi, lungimea laturilor rămânând neschimbată. De asemenea, secțiunile transversale rămân plane.

Se deduce că un element de bară din vecinătatea suprafeței laterale este solicitat numai de tensiuni tangențiale, altfel tensiunile normale ar fi produs alungirea laturilor. Se spune că elementul este solicitat la *forfecare pură*.

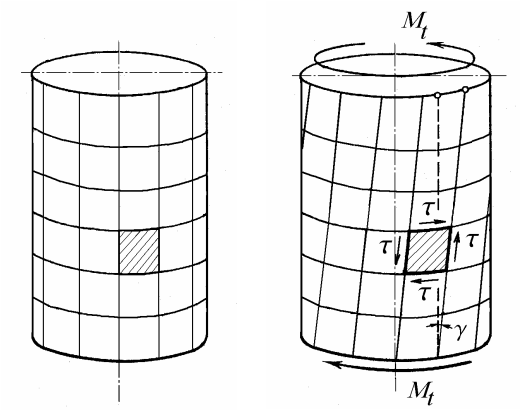
Se fac următoarele ipoteze:

a) bara este dreaptă şi are secțiune constantă pe toată lungimea;

b) momentul de torsiune este constant pe toată lungimea barei;

c) o secțiune transversală inițial plană, rămâne plană şi după răsucirea barei;

d) secțiunile sunt indeformabile şi se rotesc ca un rigid în jurul axei barei; ca urmare, o linie radială (rază) trasată într-o secțiune transversală rămâne dreaptă în timpul răsucirii barei.



a *b*

Fig. 6.1

Geometria deformației. Dacă dintr-o bară încastrată la un capăt, solicitată la răsucire, se decupează un element central de rază r şi lungime dx (fig. 6.2), atunci, în urma solicitării, generatoarea CB ocupă poziția CB', iar raza OB se deplasează în poziția OB'. Unghiul $\angle BCB' = \gamma$ este unghiul de lunecare specifică iar unghiul $\angle BOB' = \mathrm{d}\varphi$.

Se constată că deplasarea punctului B în B' este atât $\gamma\,\mathrm{d}x$ cât şi $r\,\mathrm{d}\varphi$, deci

$$\gamma\,\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Variația unghiului de 90^o al generatoarei cu secțiunea din stânga este chiar unghiul de lunecare specifică

$$\gamma = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = r\theta\,, \tag{6.1}$$

unde

$$\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{6.2}$$

se numeşte *unghi de răsucire specifică*. Acesta este unghiul cu care se rotesc una față de cealaltă două secțiuni situate la o distanță egală cu unitatea.

Relația tensiuni-deformații specifice. Aplicând legea lui Hooke pentru forfecare (3.23) rezultă

$$\tau = G\,\gamma = G\,\theta\ r\,. \tag{6.3}$$

Tensiunile tangențiale variază liniar cu distanța la centrul secțiunii. Ele sunt nule în centru şi au valori maxime la marginea secțiunii, fiind perpendiculare pe rază (fig. 6.3). Pe contur aceasta se deduce direct, pe baza dualității tensiunilor tangențiale (3.3).

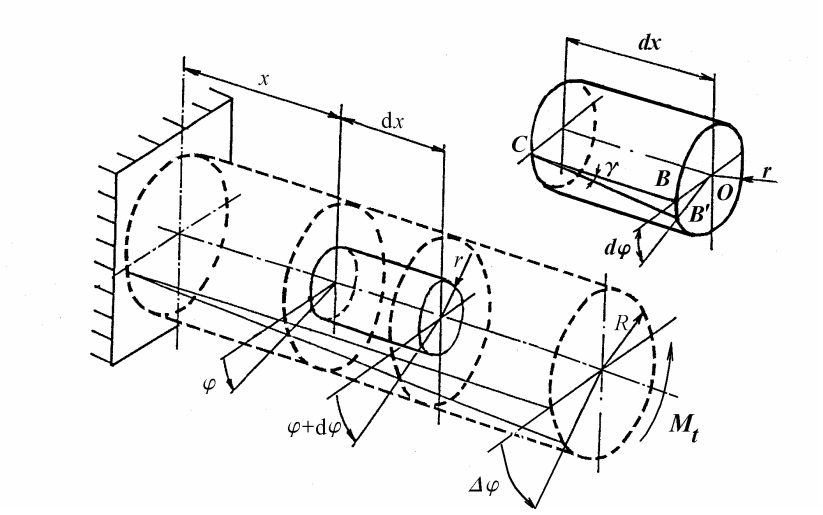


Fig. 6.2

Condițiile de echilibru. Tensiunile τ produc forțe interioare care sunt în echilibru cu momentul de răsucire aplicat M_t. Tensiunea τ care acționează pe un element de suprafață $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ dă o forță tăietoare $\tau\,\mathrm{d}A$ care produce un moment rezistent elementar față de centrul secțiunii $r\cdot\tau\,\mathrm{d}A$. Momentul rezistent total se obține prin însumarea momentelor elementare care acționează pe întreaga secțiune. Rezultă

$$M_t = \int_A r\,\tau\,\mathrm{d}A = G\theta\int_A r^2\,dA = G\,\theta\,I_p \tag{6.4}$$

unde

$$I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A \tag{6.5}$$

este *momentul de inerție polar* al secțiunii transversale.

Rezultă expresia unghiului de răsucire specifică

$$\theta = \frac{M_t}{G\,I_p}\,. \tag{6.6}$$

Înlocuind expresia (6.6) în relația (6.3) se obține formula tensiunilor tangențiale la răsucirea barelor cu secțiune axial-simetrică

$$\boxed{\tau = \frac{M_t\, r}{I_p}} \qquad (6.7)$$

Tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{max} = \frac{M_t\, r_{max}}{I_p}\,. \qquad (6.8)$$

Dacă se notează

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}}, \qquad (6.9)$$

modulul de rezistență polar al secțiunii transversale, atunci relația (6.8) devine

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}\,. \qquad (6.8,\, a)$$

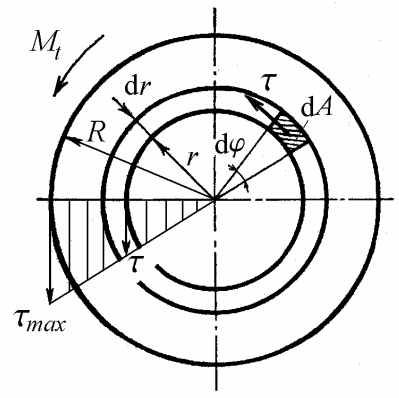


Fig. 6.3

Relația (6.8, *a*) este utilizată sub următoarele trei forme:

- formula de dimensionare: $W_{p_{nec}} = \dfrac{M_t}{\tau_a}$; (6.10, *a*)

- formula de verificare: $\tau_{ef} = \dfrac{M_t}{W_p} \le \tau_a$; (6.10, *b*)

- formula momentului de răsucire capabil: $M_{t_{cap}} = W_p \, \tau_a$. (6.10, *c*)

În relațiile (6.10), τ_a este rezistența admisibilă la răsucire.

6.3 Caracteristicile geometrice I_p şi W_p

Secțiunea circulară plină

În relația (6.5) se înlocuieşte $\mathrm{d}A = 2\pi r \, \mathrm{d}r$, aria inelului circular de grosime d*r* (fig. 6.3). Rezultă momentul de inerție polar

$$I_p = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi D^4}{32} \tag{6.11}$$

unde $D = 2R$ este diametrul secțiunii.

Din relația (6.9) se obține modulul de rezistență polar

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}} = \frac{\dfrac{\pi D^4}{32}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}. \tag{6.12}$$

Secțiunea inelară circulară

Dacă bara are o gaură centrală de diametru *d*, atunci momentul de inerție polar este

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}. \tag{6.13}$$

Modulul de rezistență polar al secțiunii inelare are expresia

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{\dfrac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16\,D}. \tag{6.14}$$

Pentru un inel subțire de rază *R* şi grosime *h* se obține

$$I_p = 2\pi R^3 h, \qquad W_p = 2\pi R^2 h.$$

Exemplul 6.1

O bară din oțel cu rezistența admisibilă $\tau_a = 50$ N/mm^2 este solicitată la răsucire de un moment $M_t = 750$ Nm. Se cere să se dimensioneze bara în două variante: a) de secțiune circulară plină, cu diametrul δ; b) de secțiune inelară, cu diametrul interior *d*, diametrul exterior *D* şi $d = 0{,}8\,D$. Să se compare ariile secțiunilor transversale în cele două cazuri.

Rezolvare

Pentru ambele variante, din formula (6.10, *a*) se obține modulul de rezistență polar necesar

$$W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{750 \cdot 10^3}{50} = 15 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Varianta 1.

$$0{,}2\,\delta^3 = 15 \cdot 10^3 , \qquad \delta = 42 \text{ mm} , \qquad A_1 = \frac{\pi \delta^2}{4} = 1385 \text{ mm}^2 .$$

Varianta 2.

$$0{,}2\,D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = 0{,}2 \left(1 - 0{,}8^4 \right) D^3 = 0{,}1181\,D^3 = 15 \cdot 10^3 ,$$

$$D = 50 \text{ mm} , \qquad d = 40 \text{ mm} , \qquad A_2 = \frac{\pi\, D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = 707 \text{ mm}^2 .$$

Se observă că $\frac{A_1}{A_2} \cong 2$ deci, la lungimi egale, greutatea barei de secțiune inelară este jumătate din greutatea barei cu secțiune circulară plină, pentru aceeaşi tensiune tangențială maximă pe conturul secțiunii. Aceasta se explică prin variația liniară a tensiunilor tangențiale în lungul razei. Secțiunea inelară are aria distribuită mai avantajos pentru a prelua tensiunile mari din vecinătatea suprafeței piesei.

6.4 Deformații la răsucire

Din relațiile (6.2) şi (6.6) se obține unghiul de răsucire pentru un element de bară de lungime d*x*:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M_t \, \mathrm{d}x}{G\, I_p} ,$$

unde produsul $G\, I_p$ se numeşte *modùl de rigiditate la răsucire*.

Pentru o bară de lungime ℓ, unghiul cu care se rotesc una față de cealaltă cele două secțiuni de la capete este

$$\Delta\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_t \, \mathrm{d}x}{G I_p}. \tag{6.15}$$

Dacă bara are secțiune constantă şi momentul de răsucire este constant pe toată lungimea, atunci se obține formula stabilită de C. A. Coulomb (1784)

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \, \ell}{G I_p}. \tag{6.16}$$

Pentru un tronson de arbore de secțiune constantă, rigiditatea la răsucire este

$$k = \frac{M_t}{\Delta\varphi} = \frac{G I_p}{\ell}. \tag{6.17}$$

Există arbori la care se impune o valoare admisibilă θ_a a unghiului de răsucire specifică. Din relația (6.6) rezultă formula de dimensionare bazată pe o condiție de rigiditate

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G \theta_a}. \tag{6.18}$$

Dacă se utilizează relațiile (6.10, a) şi (6.18), rezultă două dimensiuni diferite, dintre care se alege cea mai mare.

6.5 Energia de deformație la răsucire

Pentru un element de bară de lungime dx, lucrul mecanic efectuat de momentul M_t, a cărui valoare creşte liniar cu rotirea $\mathrm{d}\varphi$, este $\frac{1}{2} M_t \, \mathrm{d}\varphi$. Lucrul mecanic total, înmagazinat de toată bara sub formă de energie potențială de deformație, este

$$U = \int_{\ell} \frac{1}{2} M_t \, d\varphi = \int_{\ell} \frac{M_t^2 \, \mathrm{d}x}{2 G I_p}. \tag{6.19}$$

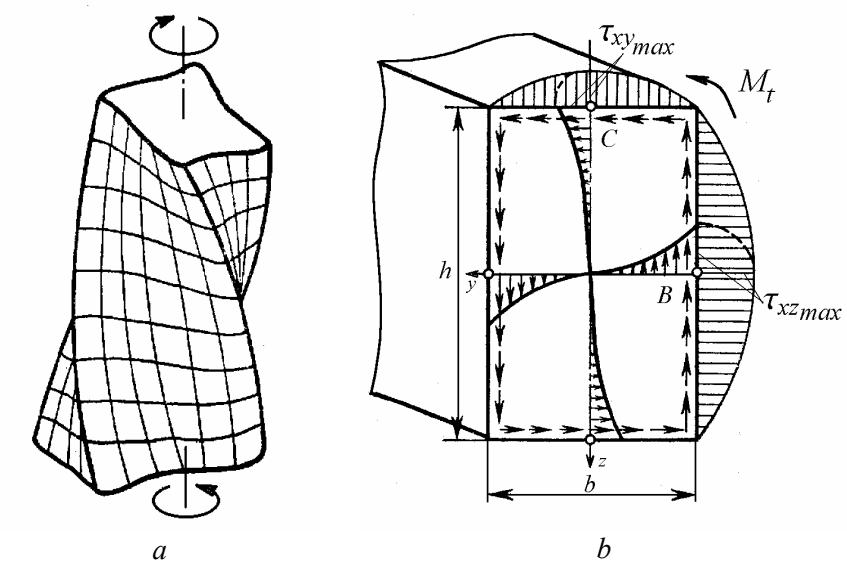
Pe baza relațiilor (6.5) şi (6.7), notând $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A \, \mathrm{d}x$, se mai obține

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \mathrm{d}V \tag{6.19, a}$$

unde $U_0 = \frac{\tau^2}{2G}$ este *energia de deformație specifică* la forfecare.

6.6 Răsucirea barelor cu secțiune dreptunghiulară

Studiul răsucirii barelor cu secțiune dreptunghiulară se face prin metodele Teoriei elasticității, deoarece în acest caz ipoteza secțiunii plane nu mai este valabilă. Secțiunile transversale ale barelor se *deplanează* (fig. 6.4, *a*). În figura 6.4, *b* se arată distribuția tensiunilor tangențiale pe o secțiune dreptunghiulară.



a *b*

Fig. 6.4

Tensiunea tangențială maximă se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului şi are valoarea

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{xz_{max}} = \frac{M_t}{\alpha\, h\, b^2}\,. \tag{6.20}$$

La mijlocul laturii mici

$$\tau_{xy_{max}} = \tau_C = \gamma\, \tau_{xz_{max}} = \gamma\, \tau_B\,.$$

Unghiul de răsucire specifică este

$$\theta = \frac{M_t}{\beta\, h\, b^3\, G}\,, \tag{6.21}$$

unde β se poate calcula cu formula aproximativă

$$\beta = \frac{1}{3} - \frac{3{,}36}{16}\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12\,h^4}\right).$$

Valorile coeficienților α, β şi γ sunt date în Tabelul 6.1 pentru câteva valori ale raportului laturilor h/b.

Tabelul 6.1

h/b	1	1,5	2	2,5	3	4	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

În general, pentru secțiuni pline oarecare, se utilizează relații generalizate de forma

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad \text{şi} \qquad \theta = \frac{M_t}{G\, I_t} \tag{6.22}$$

unde W_t este *modulul de rezistență la răsucire*, iar I_t este *momentul de inerție la răsucire* al secțiunii (Anexa 3).

Relații pentru calculul acestor caracteristici geometrice se dau în manuale de specialitate. La secțiunea circulară, W_t şi I_t sunt egale cu W_p, respectiv I_p.

În cazul unei platbenzi subțiri, raportul h/b este foarte mare, astfel că din relațiile (6.20) şi (6.21) se obține

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} h\, b^2} = G\, \theta\, b\,, \qquad \theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3} h\, b^3\, G}\,, \tag{6.23}$$

deci

$$W_t = \frac{1}{3} h\, b^2 \qquad \text{şi} \qquad I_t = \frac{1}{3} h\, b^3\,. \tag{6.24}$$

Răsucirea barelor poate fi studiată prin *analogia cu membrana* (L. Prandtl, 1903) sau prin *analogia hidrodinamică* (A. G. Greenhill, 1881).

În primul caz, se studiază deformațiile unei membrane aplicate peste un orificiu având forma secțiunii transversale a barei, sub acțiunea unei presiuni uniform distribuite. Pe membrana bombată se trasează curbele de nivel. Densitatea curbelor de nivel sau panta membranei într-un punct oarecare sunt proporționale cu tensiunea tangențială din bară în punctul respectiv. Tangenta la curba de nivel arată direcția tensiunii tangențiale. Volumul cuprins între planul conturului şi suprafața bombată a membranei este proporțional cu modulul de rigiditate la răsucire al secțiunii transversale a barei.

În al doilea caz, se studiază liniile de curent ale curgerii unui lichid incompresibil printr-un vas având forma secțiunii barei solicitate la răsucire. Viteza fluidului într-un punct este proporțională cu tensiunea tangențială în punctul respectiv al barei răsucite.

6.7 Răsucirea profilelor deschise cu pereți subțiri

Barele cu pereți subțiri se mai numesc şi profile. La profilele cu secțiunea deschisă (fig. 6.5, *a, b, c, d*), secțiunea transversală are un singur contur, constituind un domeniu simplu conex. Unele profile laminate din oțel şi anumite profile din aluminiu sunt standardizate, având denumiri consacrate: profil U (fig. 6.5, *a*), profil Z (fig. 6.5, *b*), cornier cu aripi neegale (fig. 6.5, *c*) şi profil I sau dublu-T (fig. 6.5, *d*). În general, profilele deschise sunt formate din porțiuni dreptunghiulare, colțurile fiind racordate la interior pentru diminuarea concentrării de tensiuni.

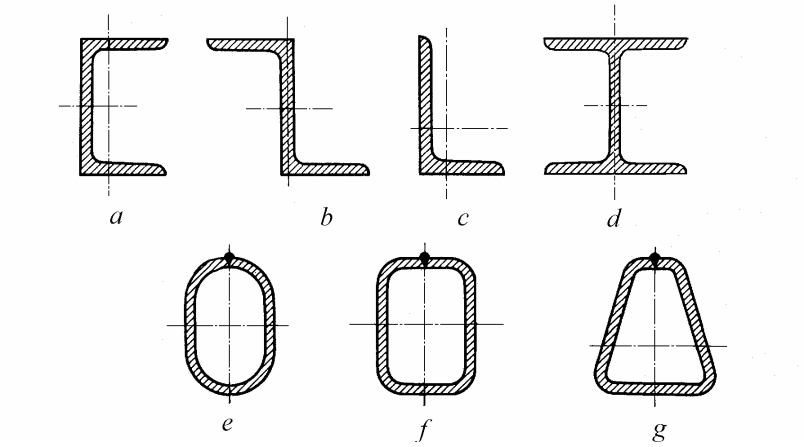


Fig. 6.5

La profilele închise din figurile 6.5, *e, f, g*, secțiunea transversală constituie un domeniu dublu conex. În construcțiile aeronautice se utilizează şi profile închise de mai multe ori, deci multiplu conexe.

Se arată, atât experimental cât şi cu metodele Teoriei elasticității, că dacă se îndoaie o platbandă subțire şi se realizează bare solicitate la răsucire având profil deschis (fig. 6.6), valorile tensiunii tangențiale maxime şi a unghiului de răsucire specifică nu se modifică. Acestea se pot calcula cu relațiile (6.23)

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} S \delta^2} = G \theta \delta , \qquad \theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3} S \delta^3 G} , \qquad (6.23, a)$$

în care S este lungimea liniei mediane desfăşurate a profilului iar δ este grosimea.

Pentru profilele deschise care pot fi descompuse în dreptunghiuri, se poate considera că diferitele dreptunghiuri de dimensiuni $\delta_i \times s_i$ acționează independent şi preiau o parte din momentul de răsucire aplicat (fig. 6.7).

Modulul de rigiditate la răsucire este

$$C = G\,I_t = c\frac{G}{3}\sum_i s_i\,\delta_i^3, \qquad (6.25)$$

unde coeficientul c ține cont de creşterea rigidităţii datorită racordărilor profilului. Se recomandă $c = 1$ la corniere, $c = 1{,}1$ la profile U şi T, şi $c = 1{,}25$ la profile I.

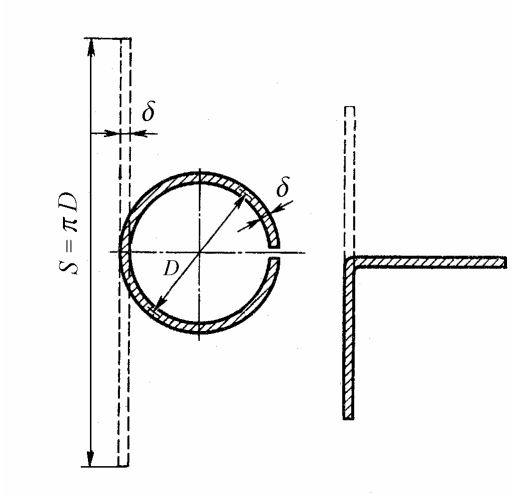


Fig. 6.6

Tensiunea tangențială maximă în fiecare dreptunghi care compune secțiunea este

$$\tau_{max\,i} = G\,\theta\,\delta_i \qquad (6.26)$$

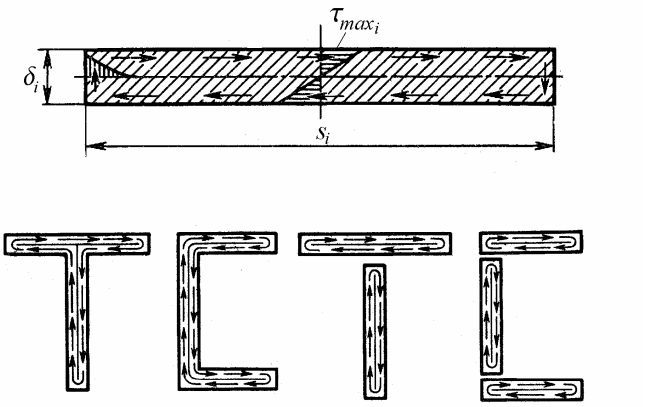


Fig. 6.7

unde unghiul de răsucire specifică este

$$\theta = \frac{M_t}{C}. \qquad (6.27)$$

Rezultatele sunt valabile pentru bare în care momentul de răsucire este constant pe toată lungimea şi pentru cazul răsucirii libere (deplanare neîmpiedicată).

Exemplul 6.2

Să se calculeze tensiunile tangeţiale maxime şi unghiul de răsucire specifică la profilul din aluminiu din figura 6.8, solicitat de un moment de răsucire de 20 Nm. Se cunoaşte $G = 27$ GPa .

Rezolvare

Se consideră că profilul U este compus din trei platbenzi subţiri, cele două tălpi şi inima. Fie M_{t1} momentul de răsucire preluat de fiecare talpă şi M_{t2} momentul preluat de inimă.

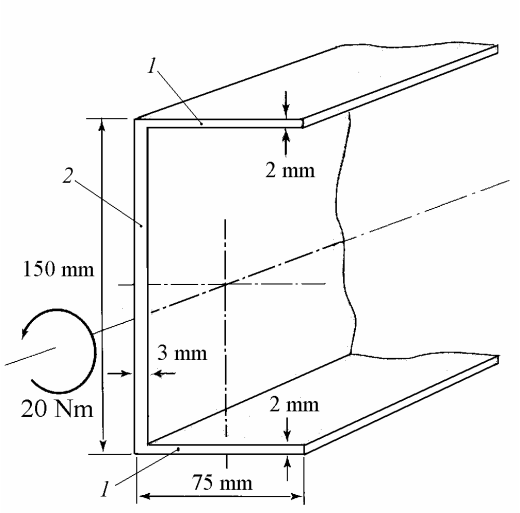


Fig. 6.8

Din a doua relaţie (6.23, *a*) se obţine :

$$M_{t1} = \frac{1}{3} \cdot 75 \cdot 2^3 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot \theta = 5{,}4 \cdot 10^6 \cdot \theta \quad \text{[N mm]},$$

$$M_{t2} = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 3^3 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot \theta = 36{,}5 \cdot 10^6 \cdot \theta \quad \text{[N mm]}.$$

Înlocuind în condiția de echilibru

$$2\,M_{t\,1} + M_{t_2} = 20 \cdot 10^3$$

expresiile momentelor de răsucire din inimă şi tălpi, se obține

$$47{,}3\,\theta = 20 \cdot 10^{-3},$$

deci unghiul de răsucire specifică este

$$\theta = 0{,}422 \cdot 10^{-3} \text{ rad/mm} = 0{,}422 \text{ rad/m} = 24{,}2\ ^0/\text{m}.$$

Din prima relație (6.23, *a*) rezultă tensiunea tangențială maximă în tălpi

$$\tau_{max\,1} = 27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}422 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 22{,}8 \text{ N/mm}^2$$

şi tensiunea tangențială maximă în inimă

$$\tau_{max\,2} = 27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}422 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 34{,}2 \text{ N/mm}^2.$$

6.8 Răsucirea profilelor închise cu pereți subțiri

Studiul profilelor subțiri închise se face adoptând *ipoteza constanței secțiunii transversale* şi *ipoteza nedeformabilității secțiunii transversale*, deci considerând că deformația secțiunii transversale este o rotație de rigid iar proiecția liniei mediane pe un plan perpendicular pe axa barei nu se modifică.

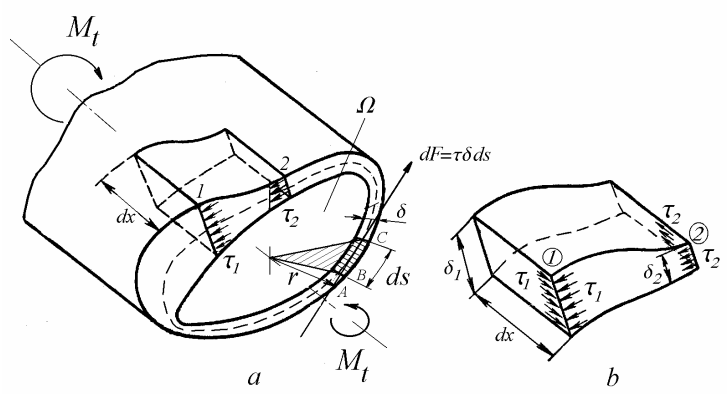


Fig. 6.9

Se consideră un profil subțire închis, de formă oarecare (fig. 6.9), având grosimea peretelui δ variabilă. Spre deosebire de secțiunile deschise, momentul M_t produce tensiuni tangențiale uniform distribuite pe grosimea peretelui (ipoteza lui R. Bredt, 1896).

Se izolează un element infinitezimal din peretele profilului, de lățime dx paralelă cu axa barei şi de lungime arbitrară în lungul liniei mediane a profilului (desenată punctat).

Fie δ_1 grosimea în punctul *1* şi δ_2 grosimea în punctul *2*. Tensiunile τ_1 şi τ_2 sunt constante pe grosimea peretelui. Conform dualității tensiunilor tangențiale (3.3), pe fețele longitudinale din *1* şi *2* acționează tensiuni egale cu tensiunile tangențiale din planul secțiunii transversale, perpendiculare pe muchia comună. Forța tăietoare pe fața *1,* în lungul axei barei, este $\tau_1 \delta_1 \,\mathrm{d}x$. Pentru echilibrul longitudinal al elementului izolat, această forță trebuie să fie egală cu forța $\tau_2 \delta_2 \,\mathrm{d}x$ care acționează pe fața *2*. Rezultă $\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2$ şi deoarece punctele *1* şi *2* au fost alese arbitrar, produsul $\tau\,\delta$ este constant în lungul conturului. Mărimea $q = \tau\,\delta$ se numeşte *flux de forfecare* şi reprezintă o forță tăietoare pe unitatea de lungime a liniei mediane a secțiunii profilului subțire.

Forța dF care acționează tangențial la contur, pe un element de lungime ds, este $\tau\,\delta\,\mathrm{d}s$. Momentul acestei forțe față de axa barei (sau față de un punct din secțiune ales arbitrar) este $\tau\,\delta\,r\,\mathrm{d}s$ iar momentul total este

$$M_t = \oint \tau\,\delta\,r\,\mathrm{d}s\,.$$

Deoarece fluxul de forfecare $\tau\,\delta = q$ este constant în lungul conturului, momentul de răsucire se mai scrie

$$M_t = \tau\,\delta \oint r\,\mathrm{d}s = q \oint r\,\mathrm{d}s\,.$$

Dar $r\,\mathrm{d}s$ este dublul suprafeței haşurate şi $\oint r\,\mathrm{d}s$ pentru tot conturul este 2Ω, unde Ω este aria delimitată de linia mediană a peretelui profilului (desenată punctat). Rezultă

$$M_t = 2\Omega\,q\,. \tag{6.28}$$

Tensiunile tangențiale au valoarea (formula lui Bredt)

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega\,\delta}\,. \tag{6.29}$$

Pentru calculul unghiului de răsucire, se egalează energia de deformație exprimată în funcție de momentul de răsucire M_t cu energia de deformație exprimată în funcție de tensiunile tangențiale τ (6.19, *a*).

Energia înmagazinată într-un element de dimensiuni $\delta \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}s$ este

$$\mathrm{d}U = \frac{\tau^2}{2\,G}\,\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.$$

Energia acumulată în tot profilul de lungime ℓ este

$$U = \frac{\ell}{2G} \oint \tau^2 \delta \, \mathrm{d}s = \frac{\ell \, \tau^2 \delta^2}{2G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta}$$

sau, înlocuind tensiunile tangențiale din relația (6.29), se obține

$$U = \frac{M_t^2 \, \ell}{8 \Omega^2 G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta} . \tag{6.30}$$

Pe de altă parte, energia de deformație este egală cu lucrul mecanic al cuplului elastic M_t pe rotirea $\Delta\varphi$

$$U = \frac{1}{2} M_t \, \Delta\varphi . \tag{6.31}$$

Egalând expresiile (6.30) şi (6.31) ale energiei de deformație, se obține unghiul de răsucire specifică (formula lui R. Bredt)

$$\frac{\Delta\varphi}{\ell} = \theta = \frac{M_t}{4\Omega^2 G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta} . \tag{6.32}$$

Dacă profilul are grosimea δ constantă în lungul conturului, atunci

$$\frac{\Delta\varphi}{\ell} = \theta = \frac{M_t \, S}{4\Omega^2 G \, \delta} = \frac{\tau \, S}{2 \Omega \, G} , \tag{6.33}$$

unde *S* este lungimea totală a liniei mediane a conturului închis.

Exemplul 6.3

Să se compare tensiunile tangețiale maxime şi rigiditățile la răsucire pentru un tub circular cu pereți subțiri şi un tub cu aceleaşi dimensiuni, în care s-a tăiat o fantă longitudinală pe toată lungimea (fig. 6.10), solicitate de momente de răsucire egale.

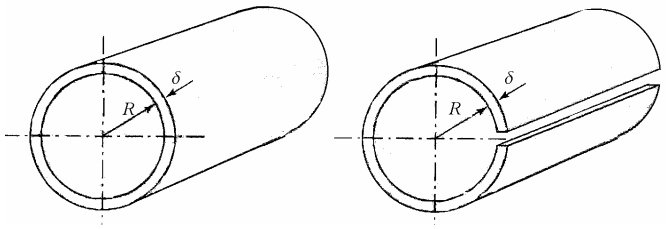


Fig. 6.10

Rezolvare

La profilul închis, din relațiile (6.8,a) şi (6.17) se obține

$$\tau_{max\,1} = \frac{M_t\, R}{I_p} = \frac{M_t\, R}{2\,\pi\, R^3\, \delta} = \frac{M_t}{2\,\pi\, R^2\, \delta},$$

$$k_1 = \frac{M_t}{\Delta\varphi_1} = \frac{G\, I_p}{\ell} = \frac{G}{\ell} 2\,\pi\, R^3\, \delta\,.$$

La profilul deschis, din relațiile (6.23) şi (6.24) se obține

$$\tau_{max\,2} = \delta\, \frac{3\, M_t}{s\, \delta^3} = \frac{3\, M_t}{2\,\pi\, R\, \delta^2},$$

$$k_2 = \frac{M_t}{\Delta\varphi_2} = \frac{G\, I_t}{\ell} = \frac{G}{\ell} \frac{2}{3}\, \pi\, R\, \delta^3\,.$$

Raportul tensiunilor tangențiale maxime este

$$\frac{\tau_{max\,2}}{\tau_{max\,1}} = 3\, \frac{R}{\delta}\,.$$

Raportul rigidităților la răsucire este

$$\frac{k_1}{k_2} = 3\, \frac{R^2}{\delta^2}\,.$$

Dacă $R/\delta = 10$, atunci tensiunile în tubul deschis sunt de 30 de ori mai mari decât cele din tubul închis, în schimb rigiditatea tubului deschis este de 300 ori mai mică decât cea a tubului închis.

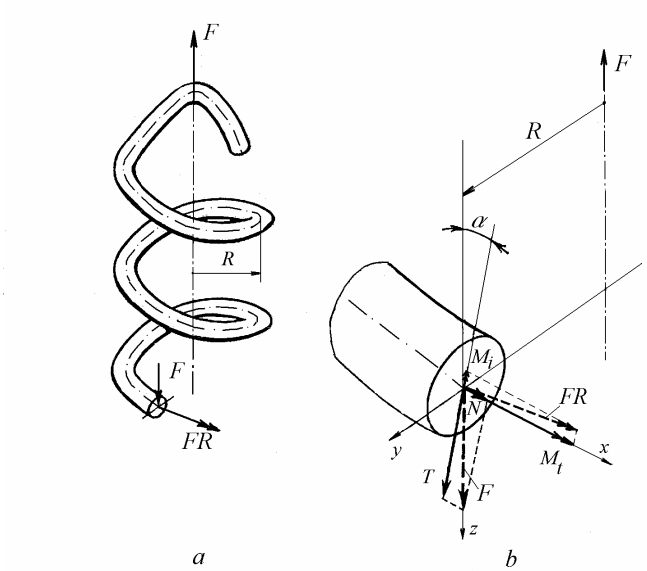
În general, la profilele deschise solicitate la răsucire, tensiunile tangențiale sunt mari şi deformabilitatea este mare. Rezultă că profilele deschise cu pereți subțiri nu sunt adecvate pentru a prelua solicitări de răsucire sau a împiedica deformațiile produse de această solicitare.

6.9 Calculul arcurilor cilindrice elicoidale

Arcul cilindric elicoidal este o bară curbă în spațiu. La un arc solicitat la întindere (fig. 6.11, *a*), dacă înclinarea spirelor este mare atunci forța *F*, redusă în centrul de greutate al secțiunii transversale, produce toate cele patru solicitări simple: întindere, forfecare, încovoiere şi răsucire (fig. 6.11, *b*).

La arcurile cu spire strânse, la care înclinarea elicei este foarte mică, forța axială şi momentul încovoietor se pot neglija, rămânând forța tăietoare $T = F$ şi momentul de răsucire $M_t = F\, R$.

La arcuri cu raza de înfăşurare mare în comparație cu diametrul spirei $(d << R)$, efectul forfecării este neglijabil, solicitarea principală fiind răsucirea.



a *b*

Fig. 6.11

Din formula de dimensionare la răsucire (6.11, *a*), în cazul secțiunii circulare, rezultă:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{F R}{\tau_a}$$

de unde se obține diametrul spirei arcului

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 F R}{\pi \tau_a}} . \qquad (6.34)$$

Numărul de spire *n* se calculează pe baza formulei săgeții arcului. Aceasta se poate deduce egalând lucrul mecanic produs de forța *F* când arcul se deformează cu săgeata *f*, cu energia de deformație la răsucire, înmagazinată de arc

$$\frac{1}{2} F f = \int_{\ell} \frac{M_t^2 \, \mathrm{d}x}{2 G I_p} = \frac{M_t^2 \, \ell}{2 G I_p} ,$$

unde $M_t = F R , \qquad \ell = 2 \pi R n , \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32} .$

Rezultă săgeata arcului

$$f = \frac{64\,F\,R^3\,n}{G\,d^4}. \tag{6.35}$$

Relația (6.35) se mai scrie sub forma

$$F = \frac{G\,d^4}{64\,R^3\,n}\,f = k\,f\,, \tag{6.36}$$

unde k este rigiditatea arcului (denumită şi *constanta elastică* a arcului). Reprezentarea grafică a relației (6.36) se numeşte *caracteristica elastică a arcului.*

Dacă se impune valoarea rigidității arcului

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta f},$$

din relația (6.36) rezultă numărul de spire necesar

$$n = \frac{G\,d^4}{64\,R^3\,k}\,. \tag{6.37}$$

La oțelurile de arcuri $\tau_a = 400 - 600$ N/mm^2 şi $G = 85$ GPa.

6.10 Sisteme static nedeterminate solicitate la răsucire

La sisteme static nedeterminate, reacțiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru din statică. Diferența între numărul reacțiunilor (sau eforturilor necunoscute) şi numărul ecuațiilor de echilibru se numeşte *grad de nedeterminare* al sistemului. Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate se utilizează ecuații de echilibru, ecuații de compatibilitate geometrică, relații forță-deformație şi condiții la limită. Deobicei se elimină deformațiile şi deplasările între ultimele trei tipuri de ecuații, rezultând un număr de condiții de deformație, exprimate în funcție de eforturi sau reacțiuni, egal cu gradul de nedeterminare.

6.10.1 Bara încastrată la capete

Fie bara din figura 6.12, *a* încastrată la capete şi solicitată de momentul *M*. Se cunosc dimensiunile *a, b, d* şi modulul de elasticitate *G*. Se cer tensiunile tangențiale maxime din bară.

Rezolvare

Reacțiunile din încastrări sunt momentele M_1 şi M_2.

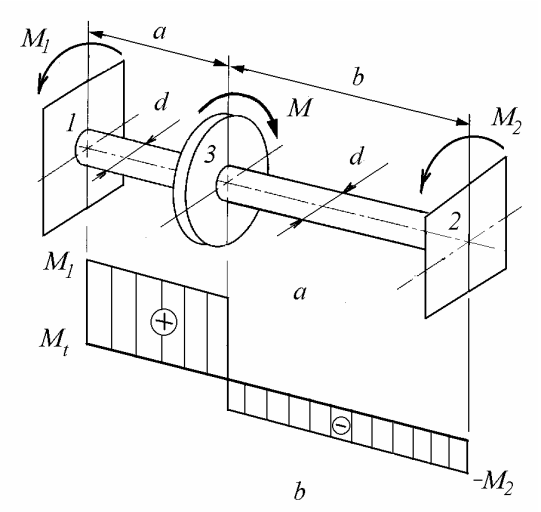


Fig. 6.12

Ecuația de echilibru. Ecuația de proiecții pe orizontală a momentelor se scrie

$$M_1 - M + M_2 = 0\,. \tag{6.38}$$

Compatibilitatea deformațiilor. În urma aplicării cuplului *M,* secțiunea 3 se roteşte, dar suma unghiurilor de răsucire ale celor două porțiuni *1-3* şi *3-2* este zero, bara fiind încastrată la capete

$$\Delta\varphi_{13} + \Delta\varphi_{32} = 0. \tag{6.39}$$

Relațiile forță-deformație. Pe baza legii lui Hooke s-a stabilit expresia (6.16) a unghiurilor de răsucire care, pentru cele două porțiuni de bară, se scrie

$$\Delta\varphi_{13} = \frac{M_{13}\,a}{G\,I_{\mathrm{p}}}\,,\ \Delta\varphi_{32} = \frac{M_{32}\,b}{G\,I_{\mathrm{p}}}\quad. \tag{6.40}$$

Din diagrama momentelor de răsucire (fig. 6.12, *b*) rezultă

$$M_{13} = M_1\,, \qquad M_{32} = M_1 - M = -M_2\,. \tag{6.41}$$

Din relațiile (6.39)-(6.41) se obțin reacțiunile

$$M_1 = M\frac{b}{\ell}\,, \qquad M_2 = M\frac{a}{\ell}\,, \tag{6.42}$$

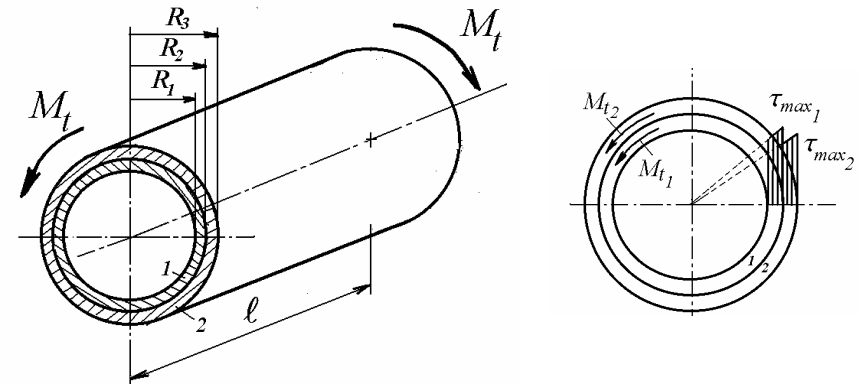
deci tensiunile tangențiale maxime în cele două porțiuni de bară au expresiile

$$\tau_{13} = \frac{M_{13}}{W_p} = \frac{M\, b}{W_p\, \ell}, \qquad |\tau_{32}| = \frac{|M_{32}|}{W_p} = \frac{M\, a}{W_p\, \ell} \tag{6.43}$$

unde modulul de rezistență polar W_p se calculează cu relația (6.12).

6.10.2 Arbori concentrici

Se cer tensiunile tangențiale produse de momentul M_t în arborele din figura 6.13, *a*, compus din două tuburi subțiri din materiale diferite, solidarizate între ele. Se cunosc modulele de elasticitate transversale G_1 şi G_2 ale celor două materiale.



a *b*

Fig. 6.13

Rezolvare

Ecuația de echilibru. Cuplul exterior M_t este preluat în proporții diferite de cele două materiale. Suma momentelor de răsucire M_{t1} şi M_{t2} egalează momentul total:

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t\,. \tag{6.44}$$

Compatibilitatea deformațiilor. Cele două materiale, cu aceeaşi lungime inițială ℓ, au deformații la răsucire identice, fiind solidarizate între ele:

$$\theta_1 = \theta_2\,. \tag{6.45}$$

Relațiile forță-deformație. Pe baza legii lui Hooke, s-a stabilit expresia unghiurilor de răsucire specifică (6.6), care pentru cele două materiale se scrie

$$\theta_1 = \frac{M_{t_1}}{G_1 I_{p_1}}, \quad \theta_2 = \frac{M_{t_2}}{G_2 I_{p_2}}. \tag{6.46}$$

Înlocuind relațiile (6.46) în (6.45) şi utilizând ecuația (6.44) se obține

$$\frac{M_{t_1}}{G_1 I_{p_1}} = \frac{M_{t_2}}{G_2 I_{p_2}} = \frac{M_t}{G_1 I_{p_1} + G_2 I_{p_2}}.$$

Rezultă tensiunile în cele două materiale la o distanță *r* față de centru

$$\tau_1 = \frac{M_{t_1} r}{I_{p_1}} = \frac{M_t r}{I_{p_1} + \frac{G_2}{G_1} I_{p_2}}; \quad \tau_2 = \frac{M_{t_2} r}{I_{p_2}} = \frac{M_t r}{I_{p_2} + \frac{G_1}{G_2} I_{p_1}}. \tag{6.47}$$

Înlocuind $r = R_2$ în relațiile (6.47), se obține

$$\frac{\tau_{max_1}}{\tau_{min_2}} = \frac{G_1}{G_2}.$$

Se observă că în dreptul suprafeței de contact, tensiunile tangențiale în cele două materiale sunt diferite, raportul lor fiind egal cu raportul modulelor de elasticitate transversale. De acest fapt trebuie ținut cont la solidarizarea materialelor.

Diagramele de variație a tensiunilor tangențiale în lungul razei sunt date în figura 6.13, *b*. Acelaşi rezultat s-ar obține dacă cei doi arbori concentrici ar fi solidarizați doar la capete.

6.11 Concentrarea tensiunilor la răsucirea barelor

Calculul la răsucire, bazat pe relația (6.8, *a*), este valabil numai pentru bare cu secțiune constantă. Discontinuitățile geometrice, de exemplu, arbore în trepte, găuri transversale, degajări, şanțuri de pană, produc variații locale ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât cele calculate în ipoteza constanței secțiunii transversale (A. Föppl, 1906). La un concentrator de tensiuni, tensiunea maximă este funcție de forma şi dimensiunile piesei în vecinătatea discontinuității.

La răsucire, *factorul de concentrare a tensiunilor elastice* K_t se definește prin relația

$$K_t = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \tag{6.48}$$

unde τ_{max} este tensiunea maximă la discontinuitatea geometrică iar τ_{nom} este valoarea obținută neglijând efectul de concentrare a tensiunilor.

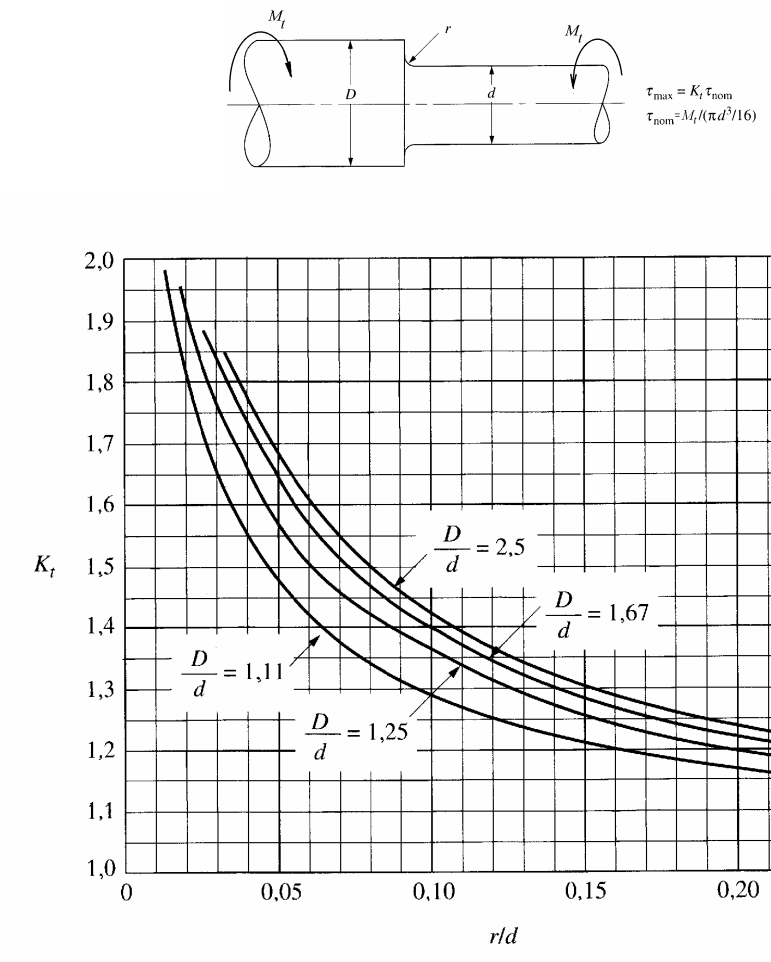


Fig. 6.14 [43]

Pentru o bară solicitată la răsucire, cu secțiune variabilă în trepte, variația factorului de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 6.14, pentru patru valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni. Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

Exemplul 6.4

Un arbore este antrenat cu o putere $N = 200$ kW la o turație $n = 600$ rot/min şi transmite puterile $N_1 = 120$ kW şi respectiv $N_2 = 80$ kW unor

consumatori (fig. 6.15, *a*). Să se dimensioneze arborele din oțel cu $\tau_a = 40$ MPa şi $G = 81$ GPa. Să se calculeze rotirea relativă a secțiunii *2* față de secțiunea *0* şi să se verifice unghiul de răsucire specifică ştiind că valoarea admisibilă este $\theta_a = 0{,}018$ rad/m. Se dau $a = 0{,}15$ m şi $b = 0{,}20$ m.

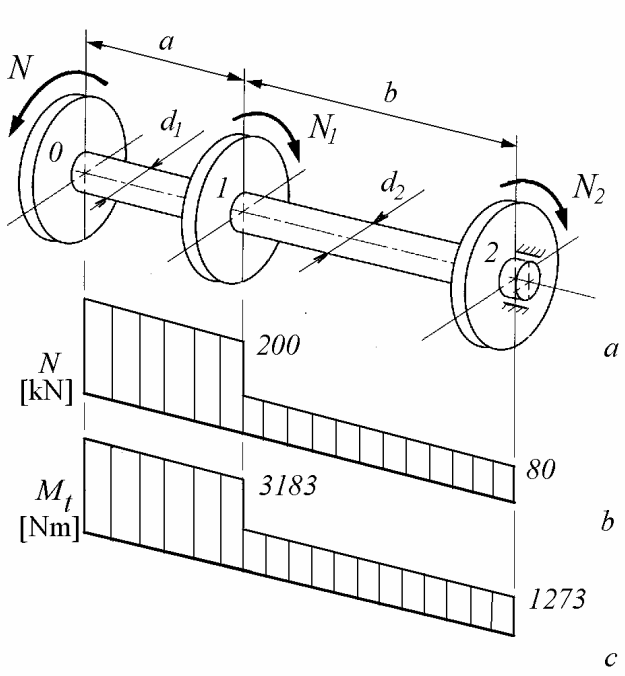


Fig. 6.15

Rezolvare

Se trasează diagrama puterilor (fig. 6.15, *b*) şi se calculează momentele de răsucire pe intervalele *0-1* şi *1-2* :

$$M_{t\,01} = 9550\,\frac{N_{01}}{n} = 9550\,\frac{200}{600} = 3183 \text{ Nm},$$

$$M_{t\,12} = 9550\,\frac{N_{12}}{n} = 9550\,\frac{80}{600} = 1273 \text{ Nm}.$$

Se poate trasa şi diagrama momentelor de răsucire (fig. 6.15, *c*).

Din relațiile (6.10,a) şi (6.12) rezultă diametrele arborelui :

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,M_{\text{t}\,01}}{\pi\,\tau_a}} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3183}{\pi\,40}} = 74 \text{ mm},$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16\,M_{t\,02}}{\pi\,\tau_a}} = 10\cdot\sqrt[3]{\frac{16\cdot 1273}{\pi\,40}} = 54{,}5 \text{ mm}\,.$$

Se aleg valorile $d_1 = 75$ mm şi $d_2 = 55$ mm.

Unghiul rotirii secţiunii *2* faţă de secţiunea *0* are expresia

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{M_{t\,01}\;\ell_{01}}{G\,I_{p_1}} + \frac{M_{t_{12}}\;\ell_{12}}{G\,I_{p\,2}}\,,$$

unde : $I_{p\,1} = \dfrac{\pi\cdot 75^4}{32} = 310{,}6\cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $I_{p\,2} = \dfrac{\pi\cdot 55^4}{32} = 89{,}84\cdot 10^4 \text{ mm}^4$.

Rezultă

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{3183\cdot 10^3\cdot 150}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 310{,}6\cdot 10^4} + \frac{1273\cdot 10^3\cdot 200}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 89{,}84\cdot 10^4} = 0{,}0054 \text{ rad}\,.$$

Unghiurile de răsucire specifică pe cele două intervale, calculate cu relaţia (6.6), sunt

$$\theta_{01} = \frac{M_{t\,01}}{G\,I_{p\,1}} = \frac{3183\cdot 10^3}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 310{,}6\cdot 10^4} = 1{,}265\cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} < \theta_a = 1{,}8\cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}\,,$$

$$\theta_{12} = \frac{M_{t_{12}}}{G\,I_{p\,2}} = \frac{1273\cdot 10^3}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 89{,}84\cdot 10^4} = 1{,}75\cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} < \theta_a\,.$$

Exemplul 6.5

Să se determine momentul de răsucire capabil pentru bara din figura 6.16, precum şi rotirea secţiunii *3* faţă de încastrare. Bara este din oţel cu $\tau_a = 60$ MPa şi $G = 81$ GPa, $d = 20$ mm, $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}1$ m.

Rezolvare

Pentru secţiunea circulară

$$W_d = W_p = \frac{\pi\,d^3}{16} = \frac{\pi\,20^3}{16} = 1{,}57\cdot 10^3 \text{ mm}^3\,,$$

iar pentru secţiunea dreptunghiulară ($\alpha = 0{,}231$ şi $\beta = 0{,}196$ pentru $h/b = 1{,}5$)

$$W_d = \alpha\,h\,b^2 = 0{,}231\cdot 15\cdot 10^2 = 0{,}3465\cdot 10^3 \text{ mm}^3\,.$$

Rezultă momentul de răsucire capabil (6.10,c)

$$M_{t_{cap}} = W_{d_{min}}\ \tau_a = 346{,}5 \cdot 60 = 20{,}79 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 20{,}79 \text{ Nm}.$$

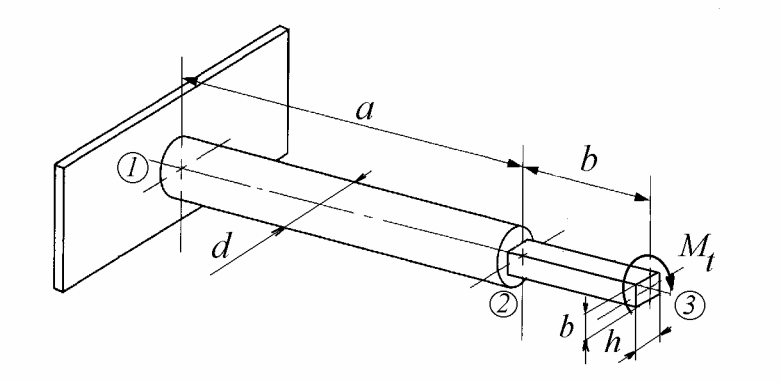


Fig. 6.16

Unghiul de rotire al secțiunii *3* față de încastrarea *1* are expresia :

$$\Delta\varphi_{31} = \frac{M_t\ \ell_{12}}{G\, I_p} + \frac{M_t\ \ell_{23}}{G\, I_d},$$

unde

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 20^4}{32} = 1{,}57 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$I_d = \beta\, h\, b^3 = 0{,}196 \cdot 15 \cdot 10^3 = 0{,}294 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Rezultă

$$\Delta\varphi_{31} = \frac{20{,}79 \cdot 10^3 \cdot 200}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4} + \frac{20{,}79 \cdot 10^3 \cdot 100}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 0{,}294 \cdot 10^4} = 0{,}012 \text{ rad}.$$

Exemplul 6.6

Să se dimensioneze bara încastrată la capete din figura 6.17, *a* din oțel, cu secțiune circulară, cu $\tau_a = 50$ MPa.

Rezolvare

Ecuația de echilibru a momentelor se scrie

$$M_1 + M_2 = 150\,.$$

Sistemul este simplu static nedeterminat. Problema se va rezolva prin suprapunerea efectelor, pe baza rezultatelor de la paragraful 6.10.1.

Dacă acționează numai momentul din secțiunea *3*, condiția de deformație $\Delta\varphi_{13} = \Delta\varphi_{32}$ se scrie $\frac{M_{13}\,\ell_{13}}{G\,I_p} = \frac{M_{32}\,\ell_{32}}{G\,I_p}$, sau $M_1'\,\ell = M_2'\,3\ell$. Dar ecuația de echilibru este $M_1' + M_2' = 150$, deci $M_1' = 37{,}5$ Nm, $M_2' = 12{,}5$ Nm, valori cu care se construieşte diagrama momentelor de răsucire din figura 6.17, *b*.

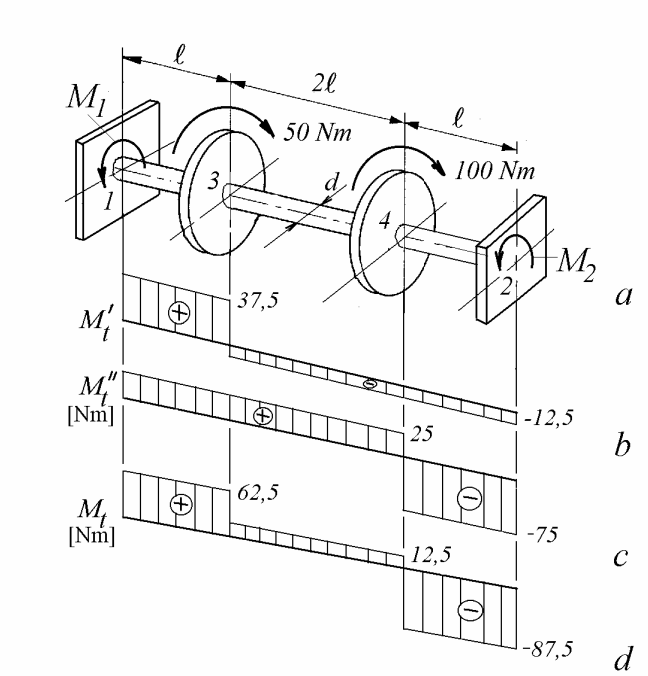


Fig. 6.17

Similar, dacă acționează numai momentul din secțiunea *4*, condiția de deformație $\Delta\varphi_{14} = \Delta\varphi_{42}$ sau $M_1''\,3\ell = M_2''\,\ell$ şi ecuația de echilibru $M_1'' + M_2'' = 100$ conduc la $M_1'' = 25$ Nm, $M_2'' = 75$ Nm; Diagrama corespunzătoare a momentelor de răsucire este redată în figura 6.17, *c*.

În cazul acțiunii simultane a celor două momente, diagrama momentelor de răsucire are forma din figura 6.17, *d*. Rezultă

$$\left|M_{t_{max}}\right| = 87{,}5 \text{ Nm}.$$

Se utilizează formula de dimensionare (6.10, *a*)

$$W_{p_{nec}} = \frac{\left|M_{t_{max}}\right|}{\tau_a} = \frac{87{,}5 \cdot 10^3}{50} = 1750 \text{ mm}^3,$$

deci $\frac{\pi d^3}{16} = 1750$, de unde rezultă $d = 20{,}7$ mm. Se alege $d = 21$ mm.

Exemplul 6.7

Un arc cilindric elicoidal având raza de înfăşurare $R = 40$ mm şi numărul de spire $n = 8$ este comprimat de o forță $F = 1250$ N. Să se dimensioneze arcul şi să se calculeze săgeata *f*, cunoscând $\tau_a = 500$ MPa şi $G = 85$ GPa.

Rezolvare

Se dimensionează arcul cu formula (6.34)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,F\,R}{\pi\,\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1250 \cdot 40}{\pi \cdot 500}} = 7{,}985 \text{ mm}.$$

Se alege $d = 8$ mm.

Săgeata arcului are expresia (6.35)

$$f = \frac{64\,F\,R^3\,n}{G\,d^4} = \frac{64 \cdot 1250 \cdot 40^3 \cdot 8}{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot 8^4} = 117{,}6 \text{ mm}.$$

Exemplul 6.8

O supapă este închisă cu două arcuri elicoidale concentrice (fig. 6.18). Se cunosc razele de înfăşurare $R_1 = 35$ mm, $R_2 = 25$ mm, diametrele spirelor $d_1 = 6$ mm, $d_2 = 5$ mm, numărul de spire $n_1 = 10$, $n_2 = 8$, şi lungimile arcurilor în stare liberă $\ell_1 = 120$ mm, $\ell_2 = 100$ mm. În stare montată arcurile au o lungime $\ell' = 90$ mm, iar când supapa este deschisă, o lungime $\ell'' = 80$ mm. Se cere forța cu care sunt comprimate arcurile când: a) supapa este închisă, b) supapa este deschisă; c) tensiunea tangențială maximă în fiecare arc. Se dă $G = 85$ GPa.

Rezolvare

Se calculează rigiditățile arcurilor

$$k_1 = \frac{G\,d_1^4}{64\,R_1^3\,n_1} = \frac{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot 6^4}{64 \cdot 35^3 \cdot 10} = 4{,}01 \frac{\text{N}}{\text{mm}},$$

$$k_2 = \frac{G\,d_2^4}{64\,R_2^3\,n_2} = \frac{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot 5^4}{64 \cdot 25^3 \cdot 8} = 6{,}64 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Forțele din arcuri la montaj sunt

$$F_1' = k_1(\ell_1 - \ell') = 4{,}01\,(120 - 90) = 120{,}43 \text{ N},$$

$$F_2' = k_2(\ell_2 - \ell') = 6{,}64\,(100 - 90) = 66{,}40 \text{ N},$$

Forța totală la montaj este

$$F' = F_1' + F_2' = 186{,}84 \text{ N}.$$

Forțele din arcuri când supapa este deschisă sunt

$$F_1'' = k_1(\ell_1 - \ell'') = 4{,}01 \cdot (120 - 80) = 160{,}58 \text{ N},$$

$$F_2'' = k_2(\ell_2 - \ell'') = 6{,}64\,(100 - 80) = 132{,}81 \text{ N}.$$

Forța totală este

$$F'' = F_1'' + F_2'' = 293{,}39 \text{ N}.$$

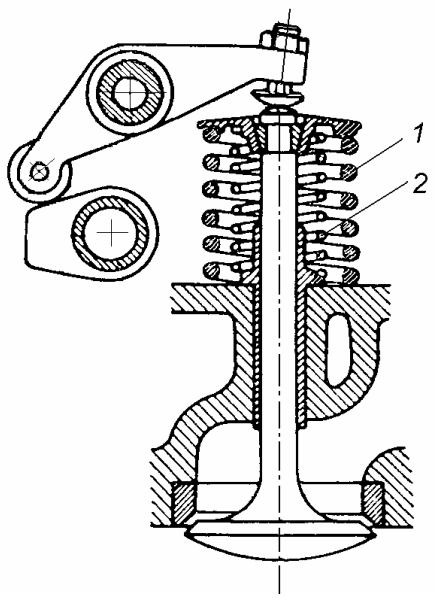


Fig. 6.18

Modulele de rezistență polare au valorile

$$W_{p1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi \cdot 6^3}{16} = 42{,}39 \text{ mm}^3, \qquad W_{p2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 5^3}{16} = 24{,}53 \text{ mm}^3.$$

Tensiunile tangențiale maxime sunt

$$\tau_{max_1} = \frac{M_{t_1}}{W_{p_1}} = \frac{F_1'' R_1}{W_{p_1}} = \frac{160{,}58 \cdot 35}{42{,}39} = 132 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\tau_{max_2} = \frac{M_{t_2}}{W_{p_2}} = \frac{F_2'' R_2}{W_{p_2}} = \frac{132{,}81 \cdot 25}{24{,}53} = 135 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

7.
PROPRIETĂȚI ALE SECȚIUNILOR PLANE

La încovoiere şi răsucire, forma secțiunii barei este uneori mai importantă decât suprafața acesteia. Caracteristicile geometrice ale secțiunilor plane, independente de deplanare, care intervin în calculul tensiunilor şi deformațiilor sunt *momentele de inerție*, *momentele centrifugale* şi *modulele de rezistență*, calculate față de axe care trec prin *centrul de greutate* al suprafeței secțiunii transversale.

Este evident că noțiunile provin din mecanică, prin particularizarea relațiilor de la plăci subțiri. O suprafață plană nu are greutate, nu are inerție şi nici proprietăți centrifugale. Momentele de inerție se mai numesc *momente de ordinul doi ale suprafețelor*, momentele centrifugale se mai numesc *produse ale suprafețelor* iar centrele de greutate se numesc *centre geometrice* sau *centroide*. Se vor utiliza denumirile "improprii" aşa cum sunt definite în standardul românesc privind terminologia din Rezistența materialelor (STAS 1963-81).

Pentru simplificarea expunerii, sistemul de axe *yOz* va fi rotit 180^o față de convenția din acest curs. Axa *Oz* va fi orientată în sus iar axa *Oy* spre dreapta.

7.1 Momente statice ale suprafețelor plane

Fie suprafața plană din figura 7.1. Momentul (de ordinul întâi al) elementului de suprafață dA față de axa *Oy* este $z\,\mathrm{d}A$, deci momentul static al întregii suprafețe față de axa *Oy* este $\int_A z\mathrm{d}A$, unde A este aria suprafeței:

$$S_y = \int_A z\,\mathrm{d}A. \tag{7.1}$$

Momentul static al întregii figuri față de axa *Oz* este

$$S_z = \int_A y\,\mathrm{d}A. \tag{7.2}$$

Se alege un nou sistem de coordonate $\bar{y}G\bar{z}$, obținut prin translația axelor sistemului *yOz*. Coordonatele elementului d*A* în noul sistem de axe sunt

$$\bar{y} = y - y_G\,, \qquad \bar{z} = z - z_G\,.$$

unde y_G, z_G sunt coordonatele punctului *G* în sistemul inițial.

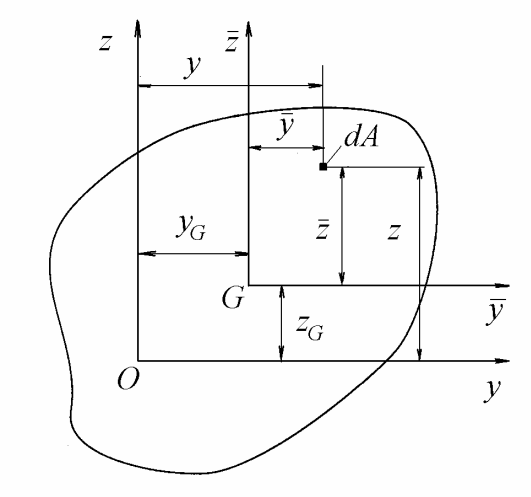


Fig. 7.1

Originea *G* a noului sistem se alege astfel încât în sistemul de coordonate $\bar{y}G\bar{z}$ momentele statice ale suprafeței să fie nule:

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} &= \int_A \bar{z}\,\mathrm{d}A = \int_A \left(z - z_G\right)\mathrm{d}A = 0, \\ S_{\bar{z}} &= \int_A \bar{y}\,\mathrm{d}A = \int_A \left(y - y_G\right)\mathrm{d}A = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate al suprafeței

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A}\,, \qquad z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z\,\mathrm{d}A}{A}\,. \tag{7.4}$$

În practică, o suprafață este adesea împărțită în mai multe figuri cu forme geometrice simple (de ex., dreptunghiuri, cercuri, triunghiuri), ale căror suprafețe şi centre de greutate sunt cunoscute sau uşor de determinat. Coordonatele centrului de greutate al suprafeței compuse se calculează cu relațiile (P. Varignon, 1724)

$$y_G = \frac{\sum A_i\, y_i}{\sum A_i}\,, \qquad z_G = \frac{\sum A_i\, z_i}{\sum A_i}\,, \tag{7.5}$$

unde y_i şi z_i sunt coordonatele centrului de greutate al suprafeței A_i $\left(i = 1, 2, .., n\right)$.

Dacă o figură are o axă de simetrie, atunci centrul de greutate se află pe această axă, deoarece momentul static față de o axă de simetrie este zero. Dacă figura are două axe de simetrie, atunci centrul de greutate se află la intersecția acestora. Dacă o figură nu are axe de simetrie dar are un centru de simetrie, atunci centrul de greutate coincide cu centrul de simetrie.

Orice axă care trece prin centrul de greutate al suprafeței se numeşte *axă centrală.*

7.2 Momente de inerție ale suprafețelor plane

Prin definiție, *momentele de inerție axiale* sunt momente de ordinul doi ale suprafețelor

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A \,, \qquad I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \,. \tag{7.6}$$

Momentul centrifugal al suprafeței față de axele *yOz* este

$$I_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A \,. \tag{7.7}$$

Dacă una dintre axe este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal al suprafeței este nul.

La suprafețe axial-simetrice, momentul de inerție polar față de punctul *O* este

$$I_p = \int_A r^2 \, \mathrm{d}A = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}A = I_z + I_y \,. \tag{7.8}$$

unde *r* este distanța de la elementul d*A* la originea *O*.

Momentele de inerție axiale şi cel polar sunt mărimi pozitive, în timp ce momentul centrifugal poate fi pozitiv, zero sau negativ.

Razele de inerție se definesc prin relațiile

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \,, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \,. \tag{7.9}$$

Dreptunghiul

La dreptunghiul cu baza *b* şi înălțimea *h* din figura 7.2, se consideră elementul de arie $\mathrm{d}A = b \, \mathrm{d}z$ situat la distanța *z* de axa *Oy*. Prima integrală (7.6) devine

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \, b \, \mathrm{d}z = \frac{b\,h^3}{12}. \tag{7.10}$$

Deci

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} \qquad \text{şi} \qquad I_z = \frac{h\,b^3}{12}. \tag{7.11}$$

Cercul

Fie cercul de rază $R = D/2$ din figura 7.3. Elementul de suprafață haşurat $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ este situat la distanța $z = r\sin\theta$ de axa *Oy*. Rezultă

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r\sin\theta)^2 \, r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Deci

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{7.12}$$

Aceeaşi expresie se poate deduce din formula momentului de inerție polar (6.7), pe baza relației (7.8), $I_y = I_z = I_p/2$.

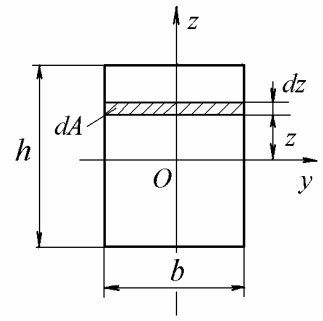


Fig. 7.2

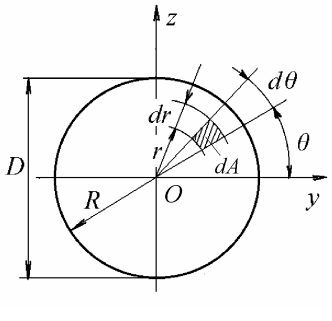


Fig. 7.3

Inelul circular

La un inel gros, cu diametrul exterior *D* şi diametrul interior *d*, momentul de inerție axial se obține scăzând momentul de inerție al cercului interior din momentul de inerție al cercului exterior

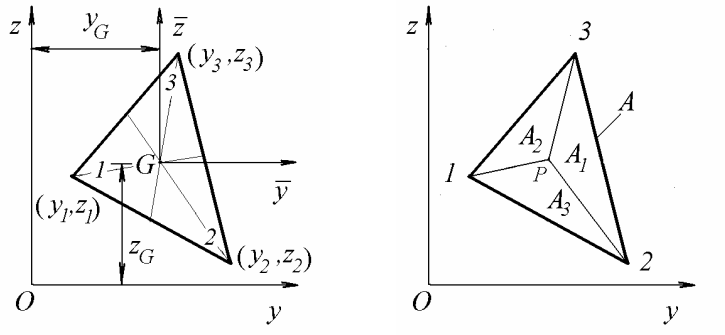
$$I_y = I_z = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}. \tag{7.13}$$

La un inel subțire, de rază R şi grosime $\delta << R$, se consideră un element de suprafață $\mathrm{d}A = R\,\mathrm{d}\theta\,\delta$ situat la distanța $z = R\sin\theta$ de axa Oy. Rezultă

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} (R\sin\theta)^2\,R\,\mathrm{d}\theta\,\delta = \pi\,R^3\,\delta. \tag{7.14}$$

Triunghiul

Fie triunghiul din figura 7.4, *a*, definit prin coordonatele vârfurilor y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ față de un sistem de axe oarecare yOz.



a *b*

Fig. 7.4

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$y_G = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z_G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \tag{7.15}$$

Momentele statice față de sistemul de coordonate yOz au expresiile

$$S_y = A\,z_G = \frac{A}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \qquad S_z = A\,y_G = \frac{A}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \tag{7.16}$$

unde A este suprafața triunghiului

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\, y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)\,\right]. \tag{7.17}$$

Momentele de inerție axiale sunt

$$I_y = \frac{A}{6}\left[\, z_1(z_1 + z_2) + z_2(z_2 + z_3) + z_3(z_3 + z_1)\,\right], \tag{7.18}$$

$$I_z = \frac{A}{6}\left[y_1 \left(y_1 + y_2 \right) + y_2 \left(y_2 + y_3 \right) + y_3 \left(y_3 + y_1 \right) \right]. \qquad (7.19)$$

Momentul centrifugal este

$$I_{yz} = \frac{A}{12}\left[\left(y_1 + y_2 \right)\left(z_1 + z_2 \right) + \left(y_2 + y_3 \right)\left(z_2 + z_3 \right) + \left(y_3 + y_1 \right)\left(z_3 + z_1 \right) \right] \qquad (7.20)$$

Calculul relațiilor de mai sus se poate face simplu utilizând *coordonatele triunghiulare* (fig. 7.4, *b*). Poziția unui punct *P* în interiorul sau pe conturul unui triunghi de suprafață *A* este determinată de trei rapoarte între suprafețe, numite coordonate triunghiulare

$$L_1 = A_1 / A\,, \qquad L_2 = A_2 / A\,, \qquad L_3 = A_3 / A\,. \qquad (7.21)$$

Între coordonatele carteziene *y*, *z* ale punctului *P* şi coordonatele triunghiulare L_1, L_2, L_3 se stabilesc relațiile liniare

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}. \qquad (7.22)$$

Înlocuind coordonatele *y*, *z* în relațiile de definiție (7.6) şi (7.7) se obțin formulele (7.18)-(7.20). Se utilizează integrale de forma (R. H. Gallagher, 1976)

$$\int_A \left(L_1\right)^a \left(L_2\right)^b \mathrm{d}A = 2A \frac{(a)!\,(b)!}{(a+b+2)!}\,, \qquad \int_A \left(L_1\right)^a \mathrm{d}A = 2A \frac{(a)!}{(a+2)!}\,.$$

Momentele de inerție ale triunghiului față de axele centrale sunt

$$I_{\bar{y}} = \frac{A}{12}\left(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2 \right), \quad I_{\bar{z}} = \frac{A}{12}\left(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 \right), \qquad (7.23)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{A}{12}\left(\bar{y}_1\bar{z}_1 + \bar{y}_2\bar{z}_2 + \bar{y}_3\bar{z}_3 \right). \qquad (7.24)$$

Relațiile (7.15)-(7.20) sunt utile la calculul momentelor de inerție ale suprafețelor de forme complicate, care pot fi aproximate prin mai multe triunghiuri, de exemplu secțiunea transversală a unui burghiu sau a unei palete de turbină sau compresor.

Triunghiul dreptunghic

Fie triunghiul dreptunghic cu baza *b* şi înălțimea *h* din figura 7.5.

Din relațiile (7.18)-(7.20) se obține

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12}\,, \qquad I_z = \frac{h\,b^3}{12}\,, \qquad I_{yz} = \frac{b^2\,h^2}{24}\,.$$

Din relațiile (7.23) şi (7.24) se obține

$$I_{\bar{y}} = \frac{b\,h^3}{36}, \qquad I_{\bar{z}} = \frac{h\,b^3}{36}, \qquad I_{\overline{yz}} = -\frac{b^2\,h^2}{72}.$$

Semnul momentului centrifugal față de axele centrale depinde de sensul acestora în raport cu triunghiul, putând fi pozitiv pentru alte direcții ale axelor față de cele din figura 7.5.

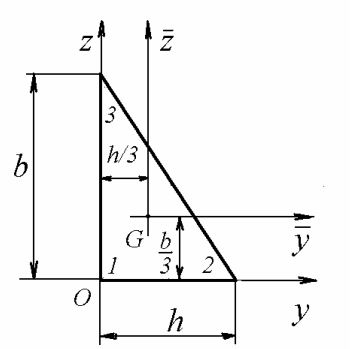


Fig. 7.5

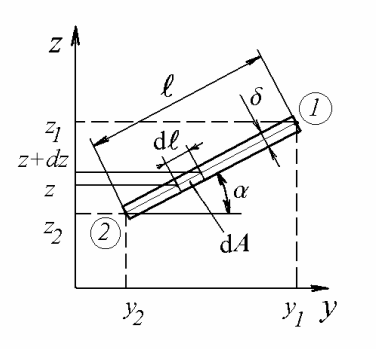


Fig. 7.6

Fâşie dreptunghiulară subțire

Pentru calculul momentelor de inerție ale profilelor subțiri, acestea se descompun în suprafețe dreptunghiulare înguste. În continuare se calculează momentele de inerție la un dreptunghi a cărui grosime este mult mai mică decât lungimea.

Fie dreptunghiul din figura 7.6, definit prin grosimea δ şi coordonatele extremităților $y_i, z_i \ (i = 1, 2)$ față de un sistem de axe oarecare *yOz*. Se notează ℓ lungimea dreptunghiului şi α înclinarea acestuia față de axa *Oy*.

Elementul de lungime $\mathrm{d}\ell$ are suprafața

$$\mathrm{d}A = \delta\,\mathrm{d}\ell = \delta\frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}.$$

Se calculează

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \frac{\delta}{\sin\alpha}\int_{z_2}^{z_1} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\delta}{\sin\alpha}\,\frac{z_1^3 - z_2^3}{3} = \frac{\delta\,\ell}{3}\,\frac{z_1^3 - z_2^3}{z_1 - z_2}$$

deci momentul de inerție față de axa *Oy* este

$$I_y = \frac{A}{3}\left(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right) \tag{7.25}$$

şi analog, momentul de inerție față de axa *Oz* este

$$I_z = \frac{A}{3}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right). \tag{7.26}$$

Din relația (7.7) se obține momentul centrifugal

$$I_{yz} = \frac{A}{6}\left[\left(y_1 + y_2\right)\left(z_1 + z_2\right) + y_1 z_1 + y_2 z_2\right] \tag{7.27}$$

7.3 Variația momentelor de inerție cu translația axelor

La calculul momentelor de inerție ale suprafețelor compuse, se cunoaşte momentul de inerție al unei suprafețe componente față de un sistem de axe local, cu originea în centrul de greutate al suprafeței respective, şi se calculează momentul de inerție față de un sistem de axe global, având axele paralele cu axele sistemului local.

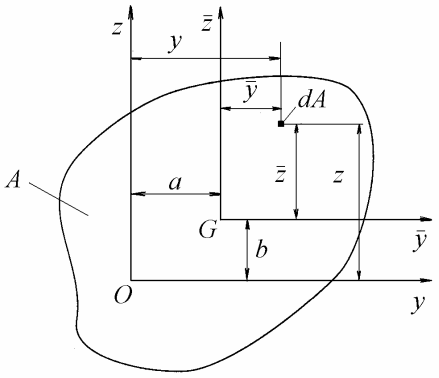


Fig. 7.7

Cu notațiile din figura 7.7, se obține

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{z} + b\right)^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{z}^2 + 2\,\bar{z}b + b^2\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{y}} + b^2 A\,,$$

$$I_z = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y} + a\right)^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y}^2 + 2\,\bar{y}a + a^2\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{z}} + a^2 A\,,$$

$$I_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y} + a\right)\left(\bar{z} + b\right)\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y}\bar{z} + a\bar{z} + \bar{y}b + ab\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{y}\bar{z}} + abA\,.$$

Rezultă relațiile stabilite de Ch. Huygens (1629-1695) şi J. Steiner (1796-1863), cunoscute sub numele de *teorema axelor paralele:*

$$I_y = I_{\bar{y}} + A\,b^2 \ , \qquad I_z = I_{\bar{z}} + A\,a^2 \ . \tag{7.28}$$

Momentul de inerție față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție față de o axă paralelă, care trece prin centrul de greutate al suprafeței, plus aria suprafeței înmulțită cu pătratul distanței între cele două axe.

$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} + A\,a\,b \ . \tag{7.29}$$

Momentul de inerție centrifugal față de două axe oarecare este egal cu momentul de inerție centrifugal față de axe paralele care trec prin centrul de greutate al suprafeței plus aria acesteia înmulțită cu distanțele între cele două axe.

Relațiile (7.28) şi (7.29) pot fi utilizate cu condiția ca cel puțin una dintre axe să fie axă centrală.

Exemplul 7.1

Se cere să se calculeze momentele de inerție axiale ale suprafeței din figura 7.8, *a* în care dimensiunile sunt date în mm.

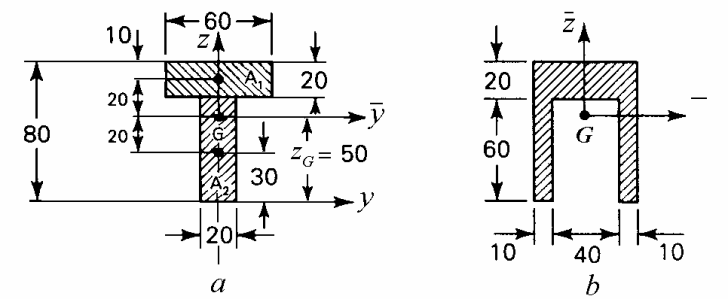


Fig. 7.8

Figura se împarte în două dreptunghiuri de arii A_1 şi A_2 la care se cunosc centrele de greutate. Se alege un sistem de axe de referință cu axa *y* la baza figurii şi axa *z* axa de simetrie verticală. Se calculează poziția centrului de greutate

$$z_G = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{20 \cdot 60 \cdot 70 + 60 \cdot 20 \cdot 30}{20 \cdot 60 + 60 \cdot 20} = 50 \text{ mm}.$$

Se trasează axa $G\bar{y}$ paralelă cu *Oy*. Aplicând prima formulă (7.28) se obține

$$I_{\bar{y}} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot 20^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot 20^2 = 136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = I_z = \frac{20 \cdot 60^3}{12} + \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 .$$

Momentul de inerție axial $I_{\bar{y}}$ al suprafeței în U din figura 7.8, *b* are aceeaşi valoare cu cel al suprafeței în T din figura 7.8, *a*.

7.4 Variația momentelor de inerție cu rotația axelor

Momentele de inerție ale unei suprafețe plane nu depind numai de alegerea originii axelor de coordonate, dar şi de orientarea axelor în planul suprafeței. La studiul încovoierii oblice a barelor este uneori necesar să se calculeze momentele de inerție față de un sistem de axe de coordonate rotit față de sistemul considerat inițial.

Fie suprafața din figura 7.9 la care se cunosc momentele de inerție față de axele *yOz*, notate I_y, I_z, I_{zy}. Interesează valorile momentelor de inerție față de un sistem de axe y_1Oz_1 rotit cu unghiul θ față de axele inițiale, momente notate $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1z_1}$.

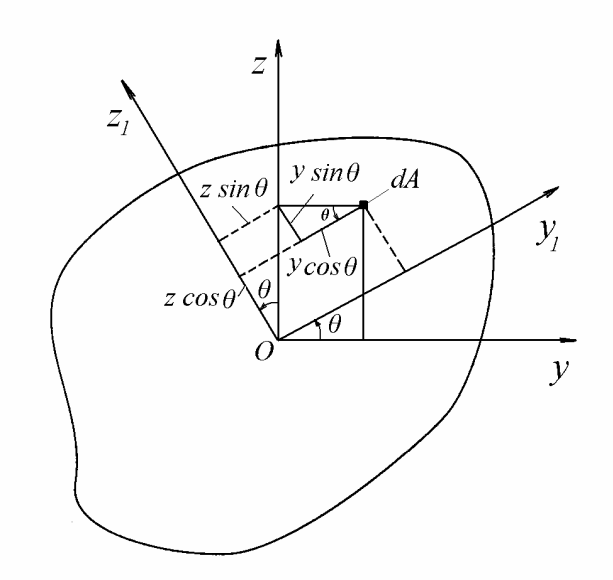


Fig. 7.9

Coordonatele elementului d*A* în sistemul de axe rotit se pot exprima în funcție de coordonatele elementului în sistemul de axe inițial:

$$y_1 = y\cos\theta + z\sin\theta , \quad z_1 = z\cos\theta - y\sin\theta . \tag{7.30}$$

Momentele de inerție față de axele rotite sunt

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(z\cos\theta - y\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}A = \\ &= \cos^2\theta \int_A z^2 \,\mathrm{d}A + \sin^2\theta \int_A y^2 \,\mathrm{d}A - 2\sin\theta\cos\theta \int_A yz \,\mathrm{d}A = \\ &= I_y \cos^2\theta + I_z \sin^2\theta - I_{yz}\, 2\sin\theta\cos\theta\,, \\ I_{z_1} &= \int_A y_1^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(y\cos\theta + z\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}A = \\ &= I_z \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta + I_{yz}\, 2\sin\theta\cos\theta\,, \\ I_{y_1z_1} &= \int_A y_1 z_1 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(y\cos\theta + z\sin\theta\right)\left(z\cos\theta - y\sin\theta\right)\mathrm{d}A = \\ &= \left(I_y - I_z\right)\sin\theta\cos\theta + I_{yz}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right). \end{aligned} \tag{7.31}$$

Relațiile (7.31) se scriu convenabil în funcție de unghiul dublu:

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta\,, \tag{7.32}$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta + I_{yz}\sin 2\theta\,, \tag{7.33}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\theta + I_{yz}\cos 2\theta\,. \tag{7.34}$$

Unghiul θ pentru care momentul de inerție axial I_{y_1} dat de relația (7.32) are o valoare extremă se obține din condiția $\mathrm{d}I_{y_1}/\mathrm{d}(2\theta) = 0$. Rezultă

$$\left(I_y - I_z\right)\left(-\sin 2\theta\right) - 2\,I_{yz}\cos 2\theta = 0\,, \tag{7.35}$$

deci unghiul care anulează derivata este dat de relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{yz}}{I_z - I_y} \tag{7.36}$$

unde, pentru simplificarea expunerii, nu s-a schimbat notația pentru unghiuri.

Ecuația (7.36) are două soluții care diferă cu 180^o. Deci există două unghiuri θ care diferă cu 90^o şi care definesc direcțiile axelor care trec prin punctul *O* şi față de care momentul de inerție axial are valori extreme. Acestea se numesc *direcții principale* de inerție. Dacă originea axelor este în centrul de greutate al suprafeței, atunci acestea se numesc *axe centrale principale* de inerție.

Comparând relațiile (7.34) şi (7.35), se observă că unghiul θ din relația (7.36) corespunde rotației axelor pentru care momentul centrifugal se anulează.

Deci axele principale de inerție se pot defini şi ca axele față de care momentele centrifugale sunt nule.

Înlocuind unghiurile θ din relația (7.36) în expresia (7.32) a momentului de inerție axial I_{y_1} se obțin momentele de inerție I_1 şi I_2 față de axele principale de inerție numite *momente de inerție principale*

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \,. \tag{7.37}$$

Este posibil să se stabilească expresii care sunt invariante față de rotirea axelor de coordonate

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_1 + I_2 \,, \tag{7.38}$$

$$I_{y_1} I_{z_1} - I_{y_1 z_1}^2 = I_y I_z - I_{yz}^2 = I_1 I_2 \,. \tag{7.39}$$

De asemenea, uneori este util să se exprime momentele de inerție, calculate față de axe oarecare, în funcție de momentele de inerție principale

$$I_y = I_1 \cos^2\theta + I_2 \sin^2\theta \,, \tag{7.40}$$

$$I_z = I_1 \sin^2\theta + I_2 \cos^2\theta \,, \tag{7.41}$$

$$I_{yz} = \frac{I_2 - I_1}{2} \sin 2\theta \,. \tag{7.42}$$

Dacă $I_{yz} = 0$ şi $I_y = I_z$, atunci $I_{y_1} = I_{z_1} = I_y = I_z$ şi orice axă este o axă principală de inerție. Acesta este cazul suprafețelor axial-simetrice şi al celor închise de poligoane regulate.

Exemplul 7.2

Se cere să se calculeze momentele de inerție față de axele centrale principale ale suprafeței din figura 7.10, în care dimensiunile sunt date în mm.

Rezolvare

Figura se împarte în două dreptunghiuri de arii A_1 şi A_2 la care se cunosc centrele de greutate G_1 şi G_2. Se alege un sistem de axe de referință, cu axa *Oy* la marginea de sus a figurii şi axa *Oz* la marginea din stânga. Se calculează poziția centrului de greutate

$$y_G = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 5 \cdot 20 + 55 \cdot 5 \cdot 2{,}5}{40 \cdot 5 + 55 \cdot 5} = 9{,}87 \text{ mm} \,,$$

$$z_G = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 5 \cdot (-2{,}5) + 55 \cdot 5 \cdot (-32{,}5)}{40 \cdot 5 + 55 \cdot 5} = -19{,}87 \text{ mm}.$$

Se desenează axa $G\bar{y}$ paralelă cu *Oy* şi axa $G\bar{z}$ paralelă cu *Oz*. Aplicând formulele (7.28) se obțin momentele de inerție axiale

$$I_{\bar{y}} = \frac{40 \cdot 5^3}{12} + 40 \cdot 5 \cdot (19{,}87 - 2{,}5)^2 + \frac{5 \cdot 55^3}{12} + 55 \cdot 5 \cdot (32{,}5 - 19{,}87)^2 = 17{,}395 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = \frac{5 \cdot 40^3}{12} + 40 \cdot 5 \cdot (20 - 9{,}87)^2 + \frac{55 \cdot 5^3}{12} + 55 \cdot 5 \cdot (9{,}87 - 2{,}5)^2 = 6{,}27 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Din formula (7.29) se determină momentul centrifugal

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = 40 \cdot 5 \cdot 10{,}13 \cdot 17{,}37 + 55 \cdot 5 \cdot (-7{,}37) \cdot (-12{,}63) = 6{,}079 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

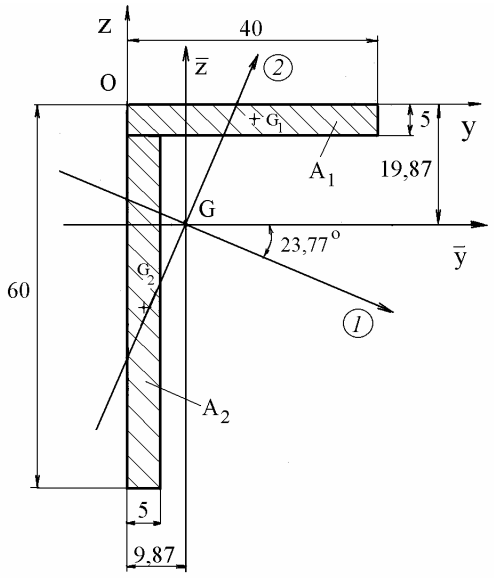


Fig. 7.10

Din relația (7.37) se calculează momentele de inerție principale

$$I_{1,2} = \frac{17{,}395 + 6{,}27}{2} \cdot 10^4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(17{,}395 - 6{,}27)^2 + 4 \cdot 6{,}079^2} \cdot 10^4 = (118{,}325 \pm 82{,}4) \cdot 10^4$$

sau

$$I_1 = 20{,}072 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \text{ şi } I_2 = 3{,}59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Din relația (7.36) se obține

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \cdot 6{,}079}{6{,}27 - 17{,}395} = -1{,}093$$

deci $2\theta = -47{,}54^{\circ}$ şi $132{,}46^{\circ}$. Rezultă unghiurile care definesc direcțiile principale de inerție, $\theta_1 = -23{,}77^{\circ}$ şi $\theta_2 = 66{,}23^{\circ}$.

În figura 7.10 s-au trasat axele centrale principale, notate *1*, respectiv *2*. Se vede că elementele suprafeței sunt cel mai îndepărtate față de axa *1*, şi cel mai apropiate față de axa *2*.

Exemplul 7.3

Se cere să se calculeze momentele de inerție față de axele centrale principale la secțiunea din figura 7.11.

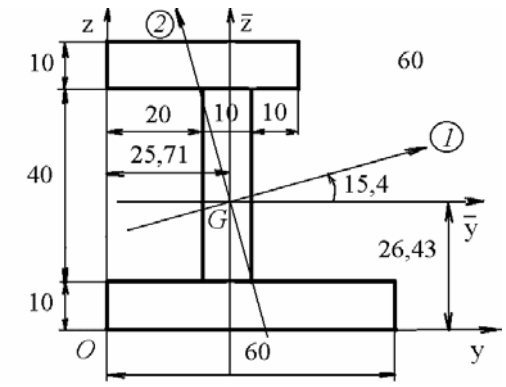


Fig. 7.11

Rezolvare

Suprafața secțiunii: $A = 1400$ mm^2.

Coordonatele centrului de greutate: $y_G = 25{,}71$ mm, $z_G = 26{,}43$ mm.

Momentele de inerție față de sistemul *yOz* sunt

$$I_y = 164{,}66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_z = 118{,}64 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{yz} = 83 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Momentele de inerție față de axele centrale $\bar{y}G\bar{z}$ sunt

$$I_{\bar{y}} = 66{,}88 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{\bar{z}} = 26{,}09 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = -12{,}14 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Direcțiile axelor centrale principale sunt definite de unghiurile

$$\theta_1 = 15{,}39^{\circ}, \ \theta_2 = 105{,}39^{\circ}.$$

Momentele de inerție centrale principale au valorile

$$I_1 = 70{,}22 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_2 = 22{,}75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

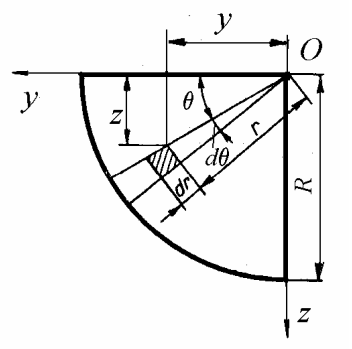


Fig. 7.12

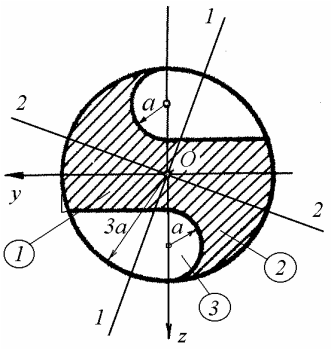


Fig. 7.13

Exemplul 7.4

Să se determine poziția centrului de greutate şi momentele de inerție față de axele sistemului de referință *yOz* pentru suprafața sfert de cerc din figura 7.12.

Rezolvare

Momentul static față de axa *Oy* (7.2) este

$$S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{3}.$$

Coordonatele centrului de greutate (7.4) sunt

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{R^3/3}{\pi R^2/4} = \frac{4R}{3\pi} = y_G.$$

Momentul de inerție față de axa *Oy* (7.6) este

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^4}{16}.$$

Momentul centrifugal (7.7) este

$$I_{yz} = \int_A y \, z \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r \cos\theta \, r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}.$$

Exemplul 7.5

Secțiunea transversală a unui burghiu are forma aproximativă din figura 7.13. Se cere să se calculeze momentele de inerție centrale principale şi poziția axelor centrale principale de inerție.

Rezolvare

Se consideră că jumătatea inferioară a secțiunii se compune din dreptunghiul *1* şi sfertul de cerc *2* din care se decupează semicercul *3*.

Momentele de inerție axiale se calculează pe baza expresiilor stabilite pentru dreptunghi (7.11), cerc (7.12) şi sfert de cerc (Exemplul 7.4), utilizând formulele lui Steiner (7.28). Se obține

$$I_y = 2\left[\frac{3a\,a^3}{12} + 3a\,a\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{16}(3a)^4 - \frac{\pi}{8}a^4 - \frac{\pi a^2}{2}(2a)^2\right] = 20{,}457\,a^4,$$

$$I_z = 2\left[\frac{a(3a)^3}{12} + a\,3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{16}(3a)^4 - \frac{\pi}{8}a^4\right] = 49{,}023\,a^4.$$

Momentul centrifugal se calculează cu relația (7.29)

$$I_{yz} = 2\left[3a^2\,\frac{a}{2}\,\frac{3a}{2} - \frac{1}{8}(3a)^4 + \left(-\frac{\pi a^2}{2}\right)\left(-\frac{4a}{3\pi}\right)2a\right] = -13{,}08\,a^4$$

Momentele de inerție principale (7.37) sunt

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} =$$

$$= \frac{20{,}457 + 49{,}023}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20{,}457 - 49{,}023}{2}\right)^2 + (-13{,}08)^2}\,.$$

$$I_1 = 54{,}1\,a^4, \qquad I_2 = 15{,}37\,a^4.$$

Direcțiile principale de inerție (7.36) se obțin din relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2\cdot(-13{,}08)}{49{,}023 - 20{,}457} = -0{,}9158$$

de unde rezultă

$$\theta_1 = 69{,}75^0 \text{ şi } \theta_2 = -21{,}24^0.$$

Exemplul 7.6

Un longeron are secțiunea din figura 7.14. Se consideră $t << a$. Se cer momentele de inerție axiale principale şi direcțiile axelor centrale principale de inerție.

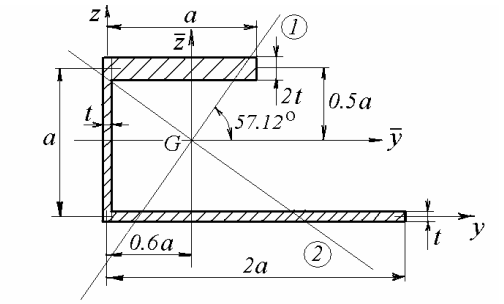


Fig. 7.14

Rezolvare

Suprafața secțiunii este: $A = 5\,t\,a$. Coordonatele centrului de greutate sunt

$$y_G = \frac{2at \cdot 0{,}5a + 2at \cdot a}{5at} = 0.6a\,, \qquad z_G = \frac{2at \cdot a + at \cdot 0{,}5a}{5at} = 0.5a\,.$$

Momentele de inerție față de axele centrale $\bar{y}G\bar{z}$ sunt

$$I_{\bar{y}} = 2at\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{t\,a^3}{12} + 2at\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1{,}083\,a^3 t\,,$$

$$I_{\bar{z}} = \frac{2\,t\,a^3}{12} + 2\,a\,t\,(0{,}1a)^2 + a\,t\,(0{,}6a)^2 + \frac{t(2a)^3}{12} + 2at\,(0{,}4a)^2 = 1{,}533\,a^3 t.$$

Momentul centrifugal este

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = 2\,a\,t(-0{,}1a)0{,}5a + 2at \cdot 0{,}4a(-0{,}5a) = -0{,}5\,a^3 t\,.$$

Momentele de inerție centrale principale (7.37) au valorile

$$I_1 = 1{,}856\,a^3\,t\,, \qquad I_2 = 0{,}7597 a^3\,t\,.$$

Direcțiile principale de inerție (7.36) sunt definite de relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \cdot (-0{,}5)}{1{,}533 - 1{,}083} = -2{,}22$$

de unde rezultă

$$\theta_1 = 57{,}12^0 \text{ şi } \theta_2 = 147{,}22^0\,.$$

Exemplul 7.7

Secțiunea unei grinzi este formată din 5 platbenzi şi 4 corniere L100x100x10 (fig. 7.15). Se cere să se calculeze momentul de inerție I_y neglijând capetele niturilor.

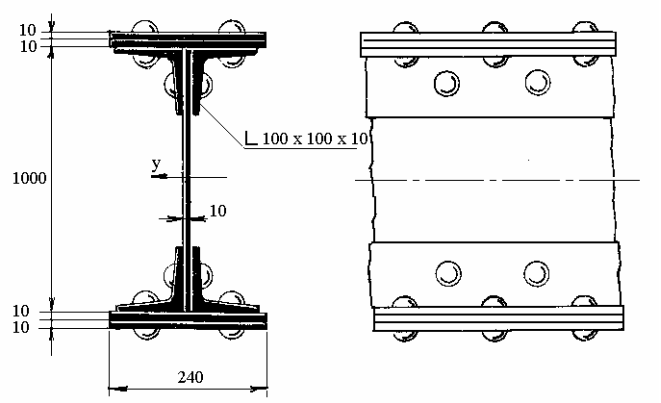


Fig. 7.15

Rezolvare

Momentul de inerție al platbenzii verticale este

$$I'_y = \frac{10 \cdot 1000^3}{12} = 8{,}333 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 .$$

Momentul de inerție pentru două platbenzi orizontale alăturate este

$$I''_y = \frac{240 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot 240 \cdot 510 = 12{,}486 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 .$$

Pentru un cornier cu aripi egale, din *Anexa 2d* se obține suprafața secțiunii $A = 1{,}92 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$, momentul de inerție $I = 177 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ şi distanța de la centrul de greutate la marginea tălpii orizontale $d = 28{,}2 \text{ mm}$. Momentul de inerție față de axa *Oy* este

$$I'''_y = I + A d^2 = \left(177 + 19{,}2 \cdot 47{,}18^2\right) \cdot 10^4 = 4{,}291 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 .$$

Momentul de inerție al întregii secțiuni este

$$I_y = \left(8{,}333 + 2 \cdot 12{,}486 + 4 \cdot 4{,}291\right) \cdot 10^8 = 50{,}47 \cdot 10^8 \text{mm}^4$$

din care aproximativ 50% este contribuția platbenzilor orizontale.

Exemplul 7.8

Să se stabilească formulele pentru calculul momentelor de inerţie centrale principale la secțiunea unei palete (fig. 7.16) împărțind secțiunea în fâşii verticale aproximate prin trapeze.

Rezolvare

În practica industrială, profilul unei palete se defineşte prin cotele unor puncte de pe extrados şi intrados, măsurate față de un sistem de referință convenabil ales. Este bine ca sistemul de axe oarecare *yOz* să fie ales cu originea cât mai aproape de poziția probabilă a centrului de greutate şi cu axa *Oy* rotită câteva grade față de o paralelă la tangenta pe intrados.

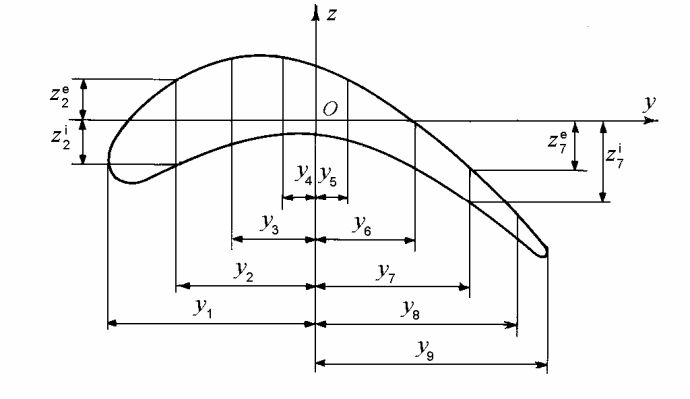


Fig. 7.16

Aria secțiunii paletei este

$$A=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(z_j^e-z_j^i+z_{j+1}^e-z_{j+1}^i\right).$$

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$y_G=\frac{1}{4A}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}^2-y_j^2\right)\left(z_j^e-z_j^i+z_{j+1}^e-z_{j+1}^i\right),$$

$$z_G=\frac{1}{8A}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\left[\left(z_j^e+z_{j+1}^e\right)^2-\left(z_j^i+z_{j+1}^i\right)^2\right].$$

Momentele de inerție față de axele *yOz* sunt

$$I_y=\frac{1}{24}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\left[\left(z_j^e+z_{j+1}^e\right)^3-\left(z_j^i+z_{j+1}^i\right)^3\right],$$

$$I_z=\frac{1}{24}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(z_j^e-z_j^i+z_{j+1}^e-z_{j+1}^i\right)\left[3\left(y_{j+1}+y_j\right)^2+\left(y_{j+1}-y_j\right)^2\right].$$

Momentul centrifugal este

$$I_y = \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{n+1}\left(y_{j+1}^2 - y_j^2\right)\left[\left(z_j^e + z_{j+1}^e\right)^2 - \left(z_j^i + z_{j+1}^i\right)^2\right].$$

Utilizând apoi relațiile Huygens-Steiner (7.28) şi (7.29), se obțin momentele de inerție şi momentul centrifugal față de axe paralele care trec prin centrul de greutate

$$I_{\bar{y}} = I_y - A\,z_G^2, \qquad I_{\bar{z}} = I_z - A\,y_G^2, \qquad I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - A\,y_G z_G.$$

Direcțiile principale de inerție sunt definite de relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}}.$$

Momentele de inerție centrale principale sunt

$$I_1 = \frac{I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}}}{2} + \frac{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}}{2}\sec 2\theta, \qquad I_2 = \frac{I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}}}{2} - \frac{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}}{2}\sec 2\theta.$$

8.
ÎNCOVOIEREA BARELOR

O bară este solicitată la *încovoiere* dacă în secţiunea transversală acţionează un moment al cărui vector este perpendicular pe axa barei. Deobicei încovoierea este rezultatul acţiunii unor sarcini transversale asupra unor bare relativ zvelte, cum sunt grinzile de susţinere a planşeelor, grinzile podurilor, osiile vagoanelor, paletele turbinelor şi compresoarelor axiale, arcurile de foi şi chiar aripile unor avioane. Aceste sarcini produc în secţiunea transversală atât moment încovoietor cât şi forţă tăietoare. Momentele încovoietoare produc tensiuni normale distribuite liniar pe înălţimea secţiunii barei, rezultat direct al ipotezei secţiunii plane. În aceste condiţii forma secţiunii barei este mai importantă decât aria suprafeţei, forme optime fiind obţinute cu ajutorul profilelor subţiri. Forţele tăietoare produc tensiuni tangenţiale nule la extremităţi şi maxime la centrul secţiunii. Calculul acestora este important la profilele subţiri şi la organele de asamblare ale grinzilor compuse.

Dacă acţionează numai un moment încovoietor se spune că bara este solicitată la *încovoiere pură*. Dacă forţele care acţionează asupra barei sunt cuprinse într-un plan de simetrie al secţiunii transversale, atunci bara este solicitată la *încovoiere simetrică*. Dacă vectorul moment este dirijat în lungul unei axe centrale de inerţie a secţiunii care însă nu este şi axă principală, atunci se spune că bara este solicitată la *încovoiere oblică*. În multe cazuri încovoierea apare simultan cu răsucirea. În acest capitol se studiază numai încovoierea.

8.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică

Determinarea distribuţiei tensiunilor la încovoierea pură este o problemă static nedeterminată la rezolvarea căreia se utilizează condiţii de deformaţie, relaţii între tensiuni şi deformaţii specifice, şi condiţii de echilibru.

Se fac următoarele ipoteze: a) barele au secţiune constantă; b) momentul încovoietor este constant în lungul barei, având vectorul dirijat perpendicular pe un plan de simetrie al barei; c) secţiunile transversale plane, înainte de încovoierea

barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; d) raza de curbură a barei deformate este mare în comparație cu dimensiunile transversale; e) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni transversale; f) modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei are aceeaşi valoare la întindere şi la compresiune.

8.1.1 Deplasări şi deformații specifice

Deformații longitudinale

Se consideră o porțiune de lungime dx dintr-o bară solicitată la încovoiere pură în planul xOz (fig. 8.1, *a*). În urma aplicării momentelor încovoietoare M_y, bara se deformează ca în figura 8.1, *b*, cele două secțiuni situate inițial la distanța dx rotindu-se relativ cu unghiul $\mathrm{d}\varphi$, dar rămânând plane, conform ipotezei lui Bernoulli.

Se observă că partea de jos a barei este întinsă, în timp ce partea superioară este comprimată. Înseamnă că trebuie să existe un plan intermediar xOy în care deformația longitudinală este zero. Acesta se numeşte *plan neutru* iar axa Ox din acest plan se numeşte *axa neutră* a barei.

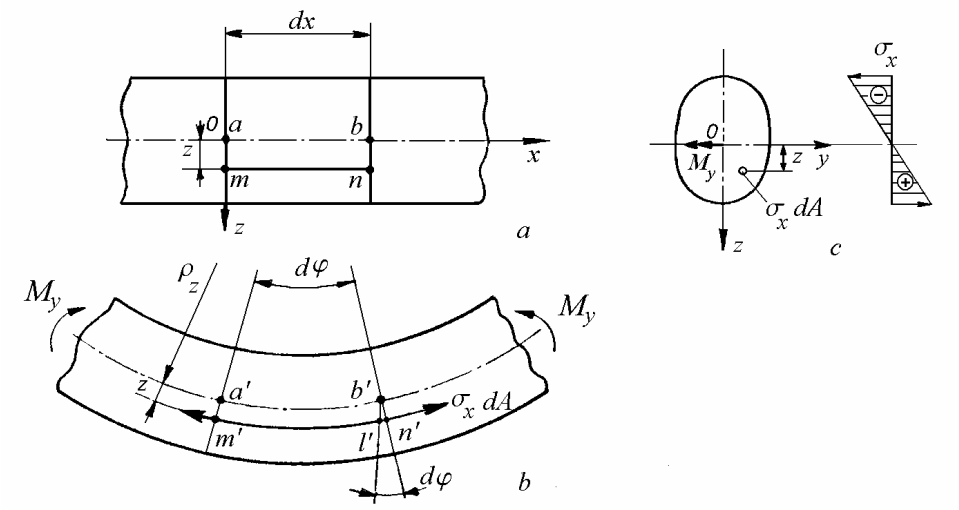


Fig. 8.1

Dacă bara ar fi formată din fibre longitudinale, atunci s-ar observa că, în urma încovoierii barei, fibrele inferioare se întind, iar cele superioare se comprimă. Fibra care nu se alungeşte prin deformația de încovoiere este $a'b' = ab$ şi se numeşte *fibra medie* a barei. Fie ρ_z raza de curbură a fibrei medii.

O fibră situată la distanța z de fibra medie are inițial lungimea

$$mn = \mathrm{d}x = a'b' = \rho_z \, \mathrm{d}\varphi$$

iar după aplicarea solicitării devine

$$m'n' = \left(z + \rho_z\right) \mathrm{d}\varphi \, .$$

Alungirea acestei fibre este

$$\Delta\left(\mathrm{d}x\right) = l'n' = m'n' - m'l' = m'n' - a'b' = z \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

Alungirea specifică se obține împărțind alungirea la lungimea inițială

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\left(\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{z \, \mathrm{d}\varphi}{\rho_z \, \mathrm{d}\varphi} = z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\rho_z} \, . \tag{8.1}$$

Dacă se notează curbura fibrei medii deformate

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \, , \tag{8.2}$$

relația (8.1) se mai scrie

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \kappa_y \, z \, . \tag{8.3}$$

unde

$$u_x = z \, \varphi \tag{8.4}$$

este deplasarea longitudinală a unui punct situat la distanța z de planul neutru.

Ca o consecință directă a ipotezei secțiunii plane, *alungirile specifice sunt distribuite liniar pe înălțimea secțiunii*, fiind nule în planul neutru şi având valori maxime în fibrele extreme. Relația (8.1) este independentă de tipul materialului barei, fiind valabilă şi la materiale cu dependență neliniară între tensiuni şi deformații specifice, sau la solicitări în domeniul plastic.

Deformații transversale.

Studiul încovoierii se bazează şi pe ipoteza invariabilității secțiunii transversale a barei. În realitate, alungirile în lungul barei sunt însoțite de contracții transversale $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \, \varepsilon_x$ (4.9). În zona întinsă grosimea barei scade, în zona comprimată grosimea barei crește, iar suprafața neutră se curbează, fenomen denumit *curbură anticlastică*. Aceste deformații sunt foarte mici şi nu modifică rezultatele obținute pentru alungirile specifice longitudinale.

8.1.2 Relația între tensiuni şi deformații specifice

Aplicând legea lui Hooke (3.22) rezultă

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \frac{E}{\rho_z}\,z = \kappa_y\,E\,z\,, \tag{8.5}$$

relație valabilă numai pentru materiale liniar-elastice. *Tensiunile normale de încovoiere variază liniar cu distanța la fibra medie* (fig. 8.1, *c*) fiind maxime în fibrele extreme, unde distanța z este maximă. În planul neutru, deci, pentru o secțiune dată, în lungul axei neutre, tensiunile produse de încovoiere sunt nule. De asemenea, conform ipotezelor de lucru, $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

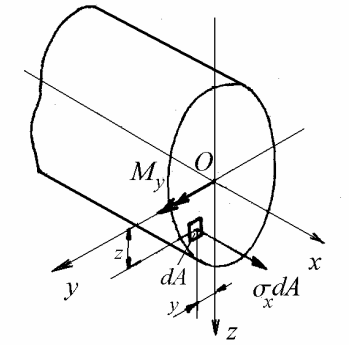


Fig. 8.2

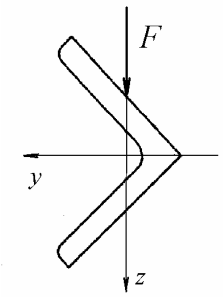


Fig. 8.3

8.1.3 Condiții de echilibru

Tensiunile σ_x produc forțe interioare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ care echilibrează momentul încovoietor M_y. Dacă se scriu relațiile de echivalență (3.4) între tensiunile σ_x şi eforturile secționale (fig. 8.2), se obține

$$N = \int_A \sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{8.6}$$

$$M_{iy} = \int_A z\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.7}$$

$$M_{iz} = -\int_A y\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{8.8}$$

În relațiile (8.6)-(8.8) s-a ținut cont de faptul că, fiind paralele cu axa *Ox*, forțele $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ pot produce în general forță axială şi momente încovoietoare, dar dintre acestea există numai momentul dirijat în lungul axei *Oy*.

Poziția axei neutre Oy.

Înlocuind relația (8.5) în (8.6) se obține $\kappa_y E \int_A z \, \mathrm{d}A = 0$ sau $\int_A z \, \mathrm{d}A = 0$. Momentul static al suprafeței secțiunii transversale (7.1) față de axa *Oy* este nul, deci axa *Oy* trebuie să fie axă centrală.

Rezultă că *axa neutră Oy trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale a barei.*

Axa Oz

Înlocuind relația (8.5) în (8.8) se obține $\kappa_y E \int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$ sau $\int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$. Rezultă că momentul centrifugal al suprafeței secțiunii transversale trebuie să fie nul, $I_{yz} = 0$, deci axele sistemului *yOz* trebuie să fie *axe centrale principale*.

În cazul încovoierii simetrice această condiție este automat îndeplinită. Când secțiunea barei nu este simetrică, planul forțelor trebuie să conțină o axă centrală principală (fig. 8.3).

8.1.4 Formula lui Navier

Înlocuind relația (8.5) în (8.7) se obține $\kappa_y E \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = M_y$ sau $\kappa_y E I_y = M_y$. Rezultă curbura barei

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{M_y}{E I_y}. \tag{8.9}$$

Din relația (8.5) rezultă formula tensiunilor normale la încovoiere simetrică

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y \, z}{I_y}} \tag{8.10}$$

stabilită de L. M. H. Navier (1826).

Tensiunile de încovoiere sunt proporționale cu momentul încovoietor şi cu distanța la axa neutră, şi invers proporționale cu momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

La o secțiune cu două axe de simetrie (fig. 8.4, *a*) tensiunile au valori maxime egale (şi de semn contrar) în fibrele extreme. La o secțiune cu o singură

axă de simetrie (fig. 8.4, *b*) tensiunea maximă σ_{max} apare în fibra cea mai îndepărtată de axa neutră. Această valoare nu trebuie să depăşească rezistența admisibilă la încovoiere pentru materialul barei.

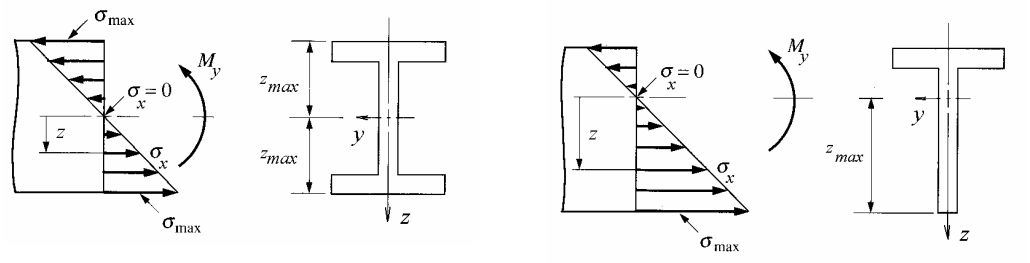


Fig. 8.4

Dacă materialul are rezistența admisibilă la întindere diferită de cea la compresiune, este importantă orientarea secțiunii astfel încât tensiunea maximă să apară pe partea cu rezistența admisibilă mai mare.

8.1.5 Modulul de rezistență axial

Tensiunea normală maximă are expresia

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_y |z_{max}|}{I_y} = \frac{M_y}{\frac{I_y}{|z_{max}|}} = \frac{M_y}{W_y} \qquad (8.11)$$

unde

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{max}|} \qquad (8.12)$$

este *modulul de rezistență axial* sau *modulul de rezistență la încovoiere* al secțiunii transversale.

La secțiunea circulară plină, cu diametrul *D,* se obține

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}. \qquad (8.13, a)$$

La secțiunea inelară circulară, cu diametrul exterior D şi cel interior d, rezultă

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32\,D}. \qquad (8.13, b)$$

La secțiunea dreptunghiulară, cu baza b şi înălțimea h, se calculează

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b\,h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b\,h^2}{6}. \qquad (8.13, c)$$

Relația (8.11) este utilizată sub următoarele forme:

- formula de dimensionare la încovoiere: $W_{y_{nec}} = \frac{M}{\sigma_a};$ (8.14, *a*)

- formula de verificare: $\sigma_{ef} = \frac{M}{W_y} \le \sigma_a;$ (8.14, *b*)

- formula momentului încovoietor capabil: $M_{cap} = W_y\,\sigma_a.$ (8.14, *c*)

În relațiile (8.14), σ_a este rezistența admisibilă la încovoiere, iar M este momentul încovoietor maxim din bară, în valoare absolută. Pentru configurații sau încărcări mai complicate, acesta se obține din diagrama momentelor încovoietoare.

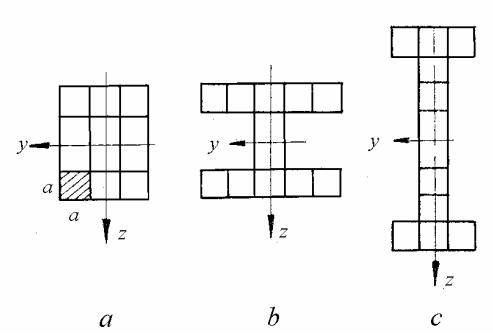


Fig. 8.5

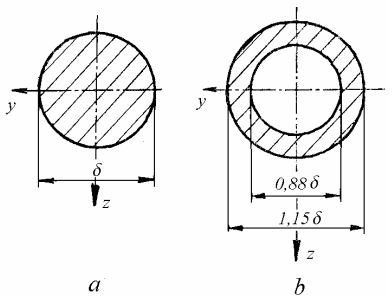


Fig. 8.6

O grindă rezistă cu atât mai bine la încovoiere cu cât W_y are valori mai mari. Forma secțiunii transversale este cu atât mai rațională cu cât W_y este mai mare pentru un consum de material cât mai mic, deci pentru o valoare cât mai mică a ariei A a suprafeței secțiunii transversale.

În figura 8.5 se arată trei secțiuni cu arii egale (12 pătrate cu latura *a*), la care prin distribuirea judicioasă a elementelor suprafeței (cât mai departe de axa *Oy*) se obține un modul de rezistență tot mai mare. Astfel

$$W_1 = 8\,a^3 \qquad \text{(fig. 8.5, } a\text{);}$$

$$W_2 = 12\,a^3 = 1{,}5\,W_1 \qquad \text{(fig. 8.5, } b\text{);}$$

$$W_3 = 23\,a^3 \cong 3\,W_1 \qquad \text{(fig. 8.5, } c\text{).}$$

La secțiunea în **I**, tălpile preiau cea mai mare parte a solicitării de încovoiere, inima având rolul de a menține tălpile în poziție şi de a prelua solicitările de forfecare care apar la încovoierea cu forță tăietoare. Se apreciază că la profilele utilizate în construcții metalice tălpile preiau până la 80% din momentul încovoietor din secțiune. La unele bare, pentru micşorarea greutății, se prevăd găuri transversale, din loc în loc, în lungul fibrei medii, deci în zona unde tensiunile normale sunt foarte mici.

În figura 8.6 se arată două secțiuni cu acelaşi modul de rezistență W_y. Secțiunea inelară (fig. 8.6, *b*), cu suprafața mai judicios distribuită (tensiunile de încovoiere cresc liniar de la centru spre suprafața barei), are aria egală cu 0,55 din aria suprafeței secțiunii circulare pline (fig. 8.6, *a*).

În acelaşi scop, în construcții metalice se utilizează profile laminate în formă de I, U sau L (*Anexele 2, a, b, c, d*).

8.1.6 Deformații la încovoierea pură simetrică

Deoarece pe porțiunile de bară solicitate la încovoiere pură $M_y = \text{const.}$, din relația (8.9) rezultă că, în cazul barelor de secțiune constantă şi din acelaşi material, se obține

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_y}{EI_y} = \text{const.}, \qquad (8.15)$$

Deci la încovoierea pură $\rho_z = \text{const.}$, bara se deformează în formă de arc de cerc.

În relația (8.15) produsul EI_y se numeşte *modùl de rigiditate la încovoiere*. Acesta este util în special la studiul barelor de secțiune eterogenă, deci la bare din mai multe materiale.

8.1.7 Energia de deformație la încovoierea pură

Pentru un element de bară de lungime dx, solicitat la încovoiere de momentul M_y, rotirea relativă a secțiunilor de la capete este (8.9)

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M_y\,\mathrm{d}x}{EI_y}.$$

Lucrul mecanic efectuat de cuplul M_y pe rotirea elastică $\mathrm{d}\varphi$ se înmagazinează în elementul de bară sub formă de energie potențială de deformație

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}M_y\,\mathrm{d}\varphi = \frac{M_y^2\,\mathrm{d}x}{2EI_y}.$$

Energia acumulată de întreaga bară are expresia

$$U = \int_{\ell} \frac{M_y^2\,\mathrm{d}x}{2EI_y}. \tag{8.16}$$

Același rezultat se obține dacă în expresia $U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\mathrm{d}V$ se înlocuiește σ_x din formula (8.10) și $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A\,\mathrm{d}x$, folosind definiția (7.6) a momentului de inerție axial.

Exemplul 8.1

Să se dimensioneze bara din figura 2.13, *a* din oțel cu $\sigma_a = 80\,\mathrm{MPa}$, având secțiunea din figura 8.E1.

Rezolvare

Din figura 2.13, *a* rezultă $|M_{max}| = 250\,\mathrm{Nm}$, deci

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{250\cdot 10^3}{80} = 3{,}125\cdot 10^3\,\mathrm{mm}^3.$$

Se calculează poziția centrului de greutate al secțiunii din figura 8.E1 față de axa y':

$$z_G = \frac{6a^2\cdot 0{,}75a + 2a^2\cdot 2a}{8a^2} = 1{,}0625\,a.$$

Momentul de inerție față de axa *Gy* este

$$I_y = \frac{4a\cdot(1{,}5a)^3}{12} + 6a^2\cdot(0{,}3125a)^2 + \frac{2a\cdot a^3}{12} + 2a^2\cdot(0{,}9375a)^2 = 3{,}635a^4,$$

iar modulul de rezistență axial al secțiunii este

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{3{,}635\,a^4}{1{,}4375\,a} = 2{,}528\,a^3.$$

Egalând cele două expresii ale lui W_y, adică $2{,}528\,a^3 = 3{,}125\cdot 10^3$, rezultă $a = 10{,}73$ mm, deci se alege

$$a = 11\,\text{mm}.$$

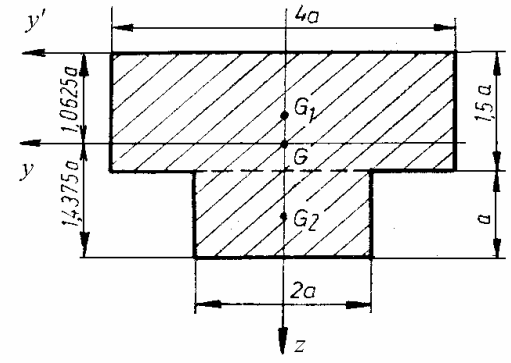


Fig. 8.E1

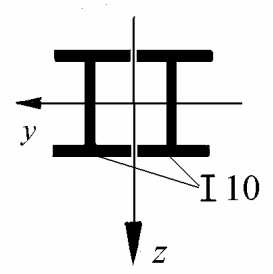


Fig. 8.E2

Exemplul 8.2

Să se verifice grinda reprezentată în figura 2.13, *e*, realizată din două profile **I**10 aşezate ca în figura 8.E2, dacă $\sigma_a = 140$ MPa.

Rezolvare

Din figura 2.13, *e* rezultă momentul încovoietor maxim $|M_{max}| = 9$ kNm.

În *Anexa 2a*, pentru profilul **I**10 se găseşte momentul de inerţie $I'_y = 171\cdot 10^4\,\text{mm}^4$. Pentru secțiunea grinzii, momentul de inerție va fi

$$I_y = 2I'_y = 342\cdot 10^4\,\text{mm}^4,$$

iar

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{342\cdot 10^4}{50} = 68{,}4\cdot 10^3\,\text{mm}^3.$$

Înlocuind în formula de verificare (8.14, *b*), se obține

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W_y} = \frac{9 \cdot 10^6}{68{,}4 \cdot 10^3} = 131{,}6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a \,.$$

Exemplul 8.3

O grindă de lemn de secțiune dreptunghiulară $b \times h \;\; (b < h)$ este tăiată dintr-un buștean de diametru *D*, astfel încât $b^2 + h^2 = D^2$. Se cere raportul laturilor secțiunii dreptunghiulare pentru care grinda are rezistență maximă la încovoiere.

Rezolvare

Modulul de rezistență axial maxim are expresia $W_y = b\,h^2/6$. Înlocuind latura *h* în funcție de *b* rezultă $bh^2 = b\left(D^2 - b^2\right)$ al cărui maxim se obține anulând derivata

$$\frac{\text{d}}{\text{d}b} b\left(D^2 - b^2\right) = D^2 - 3b^2 = 0 \,.$$

Rezultă $b = D/\sqrt{3}$, apoi $h = D\sqrt{2/3}$.

Raportul laturilor pentru care modulul de rezistență are valoare maximă este

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong \frac{5}{7} \,.$$

Exemplul 8.4

Un profil **I**40 este expandat pentru mărirea rezistenței la încovoiere. Se taie profilul prin sudare de-a lungul liniei frânte *a-b-c-d-e-f* (fig. 8.E4, *a*), apoi cele două părți se îmbină prin sudură cap la cap (fig. 8.E4, *b*). Se obține un profil expandat, cu înălțimea de $580\,\text{mm}$. Se cere să se calculeze creşterea modulului de rezistență axial prin expandare.

Rezolvare

Din *Anexa 2a* se obțin $A = 118\,\text{cm}^2$, $I_y = 29210\,\text{cm}^4$, $W_y = 1460\,\text{cm}^3$ şi momentul static al semi-secțiunii $S_y = 857\,\text{cm}^3$.

Se calculează poziția centrului de greutate al semi-secțiunii

$$z_1 = \frac{S_y}{A/2} = \frac{857}{59} = 14{,}525\,\text{cm} \,.$$

Momentul de inerție al semi-secțiunii față de axa care trece prin centrul de greutate este

$$I'_y = \frac{I_y}{2} - \frac{A}{2} z_1^2 = 14605 - 59 \cdot 14{,}525^2 = 2157{,}49\,\text{cm}^4 .$$

Momentul de inerție axial al secțiunii expandate pline este

$$I' = 2\left[I'_y + \frac{A}{2}\left(z_0 + z_1\right)^2 \right] = 2\left[2157{,}49 + 59 \cdot \left(9 + 14{,}525\right)^2\right] = 69619{,}2\,\text{cm}^4 .$$

Momentul de inerție axial al secțiunii slăbite este

$$I''_y = I' - \frac{1{,}44 \cdot 36^3}{12} = 64020{,}5\,\text{cm}^4$$

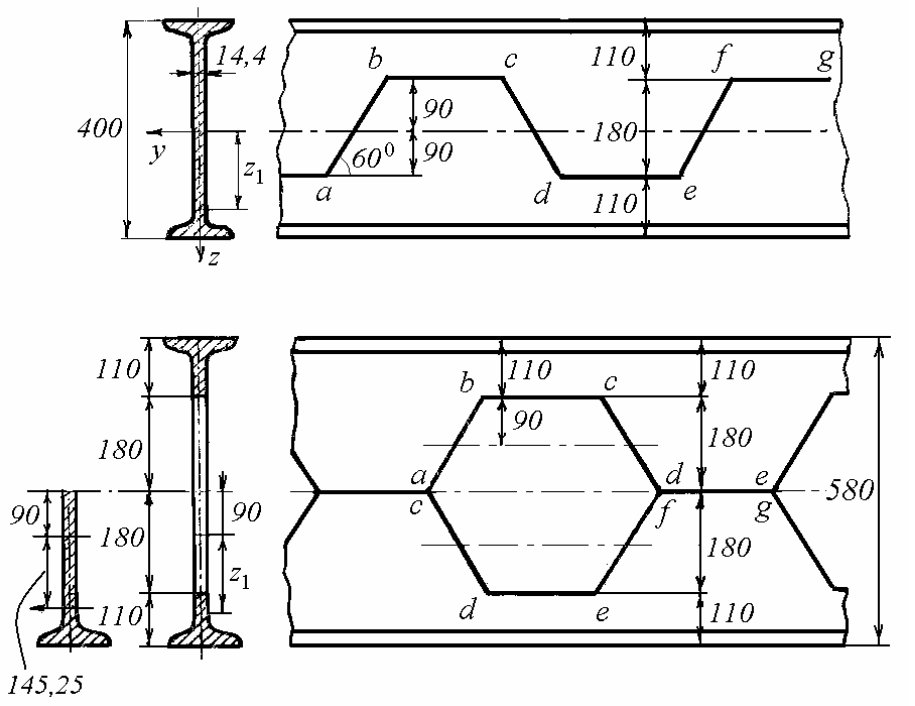


Fig. 8.E4

Modulul de rezistență axial al secțiunii slăbite este

$$W''_y = \frac{I''_y}{z_{max}} = \frac{64020{,}5}{29} = 2207{,}6\,\text{cm}^3 .$$

Rezultă o creştere a valorii modulului de rezistență cu 51,2%.

Exemplul 8.5

Să se calculeze energia de deformație înmagazinată de un arc spiral de secțiune dreptunghiulară *b*x*h*, considerat ca bară cu rază mare de curbură.

Rezolvare

Fie un arc spiral (fig. 8.E5) cu un capăt înfăşurat în jurul unei tije centrale *C* şi cu celălalt capăt fixat în *B*. Când se 'trage' arcul, capătul *C* se roteşte în sens orar în jurul tijei centrale, capătul *B* fiind acționat de o forță *F*. La strângerea arcului, curbura fiecărui segment *ds* creşte. Unghiul $\Delta\varphi$ cu care trebuie rotit capătul arcului este egal cu suma rotirilor relative $\Delta d\varphi$ ale capetelor elementelor de lungime ds ale arcului.

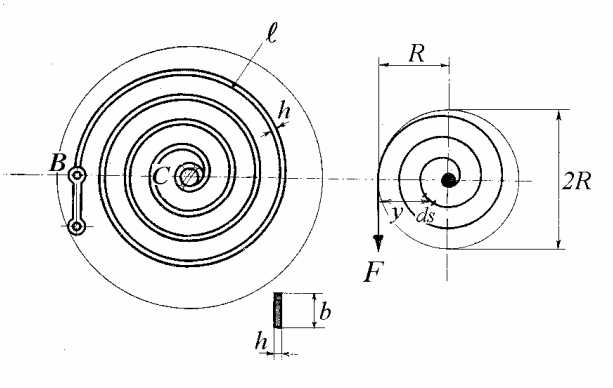


Fig. 8.E5

Asupra unui element *ds,* situat la distanța *y* de forța *F,* acționează un moment încovoietor $M = F\,y$ care produce o deformație unghiulară (8.9)

$$\Delta d\varphi = \frac{F\,y}{E\,I}\,ds\,.$$

Integrând în lungul arcului, deformația unghiulară totală se scrie

$$\Delta\varphi = \frac{F}{E\,I}\int_{\ell} y\,\mathrm{d}s\,.$$

Integrala de mai sus reprezintă momentul static al liniei arcului față de o dreaptă care coincide cu forța *F*. Acesta este egal cu lungimea arcului ℓ înmulțită cu distanța R de la centrul de greutate al liniei arcului (presupus a fi în centrul tijei pe care se înfăşoară arcul) la forța *F*. Se poate scrie deci

$$\Delta\varphi = \frac{F\,R\,\ell}{E\,I}\quad.$$

Energia de deformație acumulată de arc este egală cu lucrul mecanic efectuat de un cuplu FR pentru a roti capătul arcului un unghi $\Delta\varphi$ în jurul tijei centrale

$$U = \frac{1}{2} F R \Delta\varphi = \frac{(FR)^2 \ell}{2EI}.$$

Pentru a înmagazina energia maximă, se pune condiția ca în punctul cel mai solicitat să fie atinsă rezistența admisibilă σ_a. Acest punct este situat în spira exterioară, în punctul diametral opus capătului *B* al arcului, deci brațul forței este $2R$. Din relația (8.14, *b*) rezultă

$$FR = \frac{1}{2} \sigma_a \frac{bh^2}{6}$$

care înlocuită în expresia de mai sus conduce la formula energiei de deformație

$$U = \frac{\sigma_a^2}{24E} V,$$

unde $V = bh\ell$ este volumul arcului.

Se observă că energia de deformație a arcului spiral nu depinde decât de volumul arcului şi nu de dimensiunile *b*, *h*, ℓ luate separat.

Unghiul maxim de strângere a arcului (de rotire a capătului *C*) este

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma_a \ell}{Eh}.$$

8.2 Tensiuni la încovoierea oblică

Încovoierea oblică pură este solicitarea produsă în secțiunea transversală a unei bare de un moment al cărui vector nu este dirijat în lungul unei axe centrale principale de inerție şi care este constant în lungul barei. În continuare se vor considera componentele M_y şi M_z ale acestui moment încovoietor, în lungul axelor *Oy*, respectiv *Oz*, care trec prin centrul de greutate *O* al suprafeței secțiunii transversale, dar nu sunt axe principale de inerție. Pentru simplificarea expunerii, se renunță la notația cu bară deasupra literelor utilizată în capitolul 7.

8.2.1 Calculul față de axe centrale oarecare

Se fac următoarele ipoteze: a) barele au secțiune constantă; b) momentul încovoietor este constant în lungul barei, având vectorul dirijat perpendicular pe axa longitudinală a barei; c) secțiunile transversale plane, înainte de încovoierea barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; d)

razele de curbură ale barei deformate sunt mari în comparație cu dimensiunile transversale; e) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni transversale; f) modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei are aceeași valoare la întindere și la compresiune.

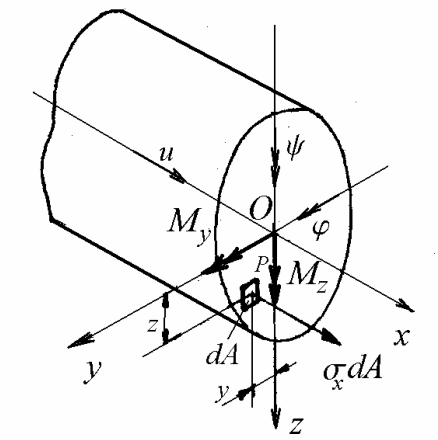


Fig. 8.7

Relații între deplasări și deformații specifice

Ca o consecință directă a ipotezei secțiunii plane, deplasarea longitudinală a unui punct *P* de coordonate *y*, *z,* are forma generală

$$u_x = u + z\,\varphi - y\,\psi \tag{8.17}$$

unde *u* este o deplasare de translație în lungul axei *Ox*, φ este unghiul de rotație al secțiunii față de axa *Oy* și ψ este unghiul de rotație față de axa *Oz*.

Alungirea specifică este

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = \varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\,. \tag{8.18}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,, \qquad \kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\,, \qquad \kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\,. \tag{8.19}$$

În relațiile (8.19), κ_y și κ_z sunt curburile fibrei medii a barei în planele *xOz*, respectiv *xOy*. Indicii corespund axelor față de care au loc rotirile respective.

Relația între tensiuni și deformații specifice

Aplicând legea lui Hooke (3.22) rezultă

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = E\,\left(\varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\right), \tag{8.20}$$

relație valabilă numai pentru materiale liniar-elastice. *Tensiunile normale de încovoiere variază liniar cu distanțele la axele de coordonate*.

Condiții de echilibru

Distribuția de tensiuni este echivalentă static cu momentul încovoietor din secțiune, forța axială fiind zero. Din relațiile de echivalență (3.4) între tensiunile σ_x şi eforturile secționale, se obține

$$N = \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{8.21}$$

$$M_{iy} = \int_A z\,\sigma_x \,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.22}$$

$$M_{iz} = -\int_A y\,\sigma_x \,\mathrm{d}A = M_z\,. \tag{8.23}$$

Înlocuind expresia (8.20) în relația (8.21) se obține

$$\varepsilon\, E \int_A \mathrm{d}A + \kappa_y\, E \int_A z\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y\,\mathrm{d}A = 0\,.$$

Deoarece axele de coordonate sunt axe centrale, momentele statice sunt nule şi rezultă $\varepsilon = 0$, căci forța axială este nulă., deci relația (8.20) devine

$$\sigma_x = \kappa_y\, E\, z - \kappa_z\, E\, y\,. \tag{8.24}$$

Înlocuind expresia (8.24) în relațiile (8.22) şi (8.23), se obține

$$\kappa_y\, E \int_A z^2\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.25}$$

$$\kappa_y\, E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y^2\,\mathrm{d}A = -M_z\,. \tag{8.26}$$

sau, pe baza relațiilor de definiție ale momentelor de inerție (7.6) şi (7.7),

$$\kappa_y\, I_y - \kappa_z\, I_{yz} = \frac{M_y}{E}\,, \tag{8.25, *a*}$$

$$\kappa_y\, I_{yz} - \kappa_z\, I_z = -\frac{M_z}{E}\,, \tag{8.26, *b*}$$

de unde rezultă curburile

$$\kappa_y = \frac{1}{E}\,\frac{I_z\, M_y + I_{yz}\, M_z}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\,, \qquad \kappa_z = \frac{1}{E}\,\frac{I_{yz}\, M_y + I_y\, M_z}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\,. \tag{8.27}$$

Înlocuind expresiile (8.27) în relația (8.24) se obține formula tensiunilor normale la încovoierea oblică, față de axe centrale principale

$$\sigma_x = -\frac{I_{yz}\, M_y + I_y\, M_z}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\, y + \frac{I_z\, M_y + I_{yz}\, M_z}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\, z\,. \tag{8.28}$$

Axa neutră este linia din planul secțiunii transversale în lungul căreia tensiunile σ_x sunt nule. Această axă se află la intersecția planului secțiunii transversale cu planul neutru, care trece prin centrul de greutate al secțiunii. Egalând expresia (8.28) cu zero rezultă că axa neutră este o linie dreaptă, de ecuație

$$z = \frac{I_{yz}\, M_y + I_y M_z}{I_z\, M_y + I_{yz}\, M_z}\, y\,. \tag{8.29}$$

Planul care conține fibra medie deformată a barei este perpendicular pe axa neutră. El nu coincide cu planul forțelor, care este perpendicular pe vectorul moment, de componente M_y şi M_z. De aici denumirea de *încovoiere oblică*.

Dacă $M_z = 0$, ecuația (8.28) se reduce la

$$\boxed{\sigma_x = M_y\, \frac{I_z\, z - I_{yz}\, y}{I_y I_z - I_{yz}^2}} \tag{8.30}$$

iar ecuația axei neutre este

$$z = \frac{I_{yz}}{I_z}\, y\,. \tag{8.31}$$

Se observă că dacă $I_{yz} = 0$, ecuația (8.30) se reduce la formula lui Navier (8.10) stabilită pentru încovoierea simetrică.

8.2.2 Calculul față de axe centrale principale

Dacă se înlocuieşte $I_{yz} = 0$ în ecuația (8.28), rezultă

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}\, y + \frac{M_y}{I_y}\, z\,, \tag{8.32}$$

formulă valabilă atunci când axele *Oy* şi *Oz* sunt axe centrale principale. În acest caz, momentele de inerție I_y şi I_z sunt momentele de inerție principale I_1 sau I_2, funcție de forma secțiunii. Pentru simplificare, s-a renunțat la notația cu bară deasupra literelor.

Dacă acționează un singur moment încovoietor M, al cărui vector este înclinat cu unghiul α față de axa principală Oy, atunci $M_y = M\cos\alpha$ şi $M_z = M\sin\alpha$.

Relația (8.32) devine

$$\sigma_x = -\frac{M\sin\alpha}{I_z}\,y + \frac{M\cos\alpha}{I_y}\,z\,, \tag{8.33}$$

Ecuația axei neutre se obține pentru $\sigma_x = 0$:

$$-\frac{y\sin\alpha}{I_z} + \frac{z\cos\alpha}{I_y} = 0$$

sau

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{I_y}{I_z} = \operatorname{tg}\beta\,. \tag{8.34}$$

Dacă $I_y \neq I_z$, atunci $\beta \neq \alpha$, deci înclinarea axei neutre diferă de înclinarea vectorului moment, încovoierea este oblică. Dacă $I_y = I_z$ sau dacă $\alpha = 0$, atunci cele două direcții coincid, planul de încovoiere este perpendicular pe axa neutră.

Exemplul 8.6

Bara în consolă din figura 8.E6, *a*, de lungime $\ell = 1$ m, are secțiunea nesimetrică de la Exemplul 7.2 şi este solicitată de forța verticală $F = 200$ N care trece prin centrul de greutate al secțiunii din capăt. Se cere tensiunea normală maximă din bară.

Rezolvare

Momentul încovoietor este maxim în secțiunea din încastrare

$M_y = -F\,\ell = -200\cdot 10^3 = -2\cdot 10^5$ Nmm, $M_z = 0$.

Metoda 1. *Calculul față de axe centrale oarecare*

Tensiunile normale se calculează cu relația (8.30).

Centrul de greutate al secțiunii este localizat în figura 8.E6, *b*.

Momentele de inerție şi momentul centrifugal calculate la Exemplul 7.2 față de axe centrale oarecare sunt $I_{\bar{y}} = 17{,}395\cdot 10^4$ mm^4, $I_{\bar{z}} = 6{,}27\cdot 10^4$ mm^4, $I_{\bar{y}\bar{z}} = 6{,}079\cdot 10^4$ mm^4.

Ecuația axei neutre (8.31) se scrie

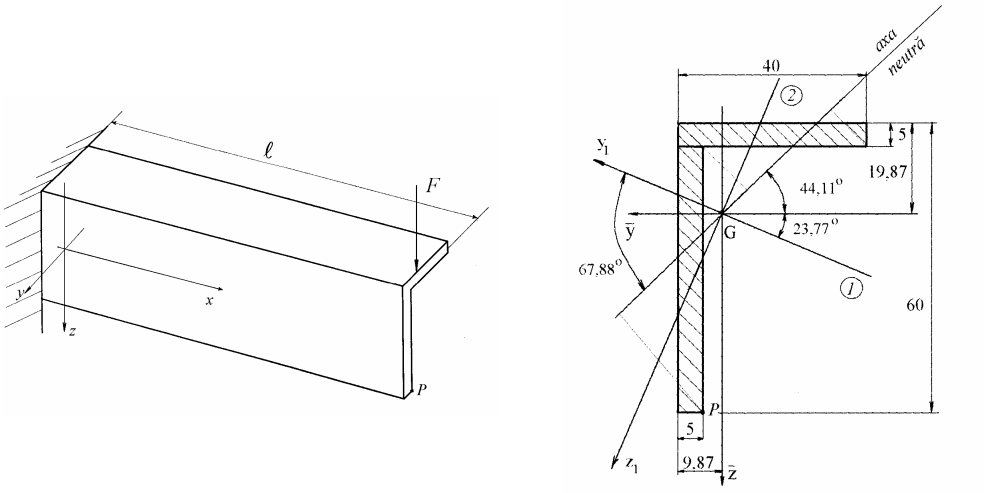
$$\bar{z} = \frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}}}\,\bar{y} = \frac{6{,}079}{6{,}27}\,\bar{y} = 0{,}97\,\bar{y} = \operatorname{tg}\delta \cdot \bar{y}\,,$$

deci axa neutră este înclinată cu unghiul $\delta = 44{,}11^0$ față de axa $G\bar{y}$. Punctul cel mai îndepărtat de această axă este punctul *P,* de coordonate $\bar{y}_P = 4{,}87\ \text{mm}$, $\bar{z}_P = 40{,}13\ \text{mm}$.

Din relația (8.30) se obține

$$\sigma_P = M_y\,\frac{I_{\bar{z}}\,\bar{z}_P - I_{\bar{y}\bar{z}}\,\bar{y}_P}{I_{\bar{y}}\,I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} =$$

$$= -2\cdot 10^5 \cdot \frac{6{,}27\cdot 40{,}13 - 6{,}079\cdot 4{,}87}{17{,}395\cdot 6{,}27 - 6{,}079^2}\cdot 10^{-4} = -61{,}6\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$



a *b*

Fig. 8.E6

Metoda 2. *Calculul față de axe centrale principale*

Tensiunile normale se calculează cu relația (8.33)

$$\sigma_x = -\frac{M_{z_1}}{I_2}\,y_1 + \frac{M_{y_1}}{I_1}\,z_1\,.$$

Momentele de inerție principale, calculate la Exemplul 7.2, sunt $I_1 = 20{,}072 \cdot 10^4$ mm^4, $I_2 = 3{,}59 \cdot 10^4$ mm^4, iar direcțiile principale fac unghiurile $\theta_1 = -23{,}77^0$ şi $\theta_2 = \theta_1 + 90^0$ cu axa $G\bar{y}$ (deci $\alpha = 23{,}77^0$).

Sistemul de axe centrale principale, notat $y_1 G z_1$, este rotit cu unghiul $\theta_1 = -23{,}77^0$ față de sistemul inițial $\bar{y} G \bar{z}$.

Ecuația axei neutre (8.34) se scrie

$$z_1 = \frac{I_1}{I_2} \operatorname{tg}\alpha \cdot y_1 = \frac{20{,}07}{3{,}59} \operatorname{tg} 23{,}77^0 \cdot y_1 = 2{,}46\, y_1 = \operatorname{tg}\beta\, y_1,$$

deci axa neutră este înclinată cu unghiul $\beta = 67{,}89^0$ față de axa Gy_1.

Se observă că $\beta - \alpha = 67{,}88^0 - 23{,}77^0 = 44{,}11^0 = \delta$, deci rezultatul coincide cu cel obținut prin prima metodă. Punctul cel mai îndepărtat de această axă este punctul *P,* de coordonate $\bar{y}_P = 4{,}87$ mm, $\bar{z}_P = 40{,}13$ mm.

Transformarea de coordonate (7.30) se mai scrie

$$y_1 = \bar{y}\cos\theta_1 + \bar{z}\ \sin\theta_1 = \bar{y}\cos\left(-23{,}77^0\right) + \bar{z}\ \sin\left(-23{,}77^0\right) = 0{,}915\,\bar{y} - 0{,}403\,\bar{z},$$

$$z_1 = \bar{z}\cos\theta_1 - \bar{y}\sin\theta_1 = \bar{z}\cos\left(-23{,}77^0\right) - \bar{y}\ \sin\left(-23{,}77^0\right) = 0{,}915\,\bar{z} + 0{,}403\,\bar{y}.$$

Coordonatele punctului *P* în sistemul de axe centrale principale sunt

$$y_{1P} = 0{,}915\,\bar{y}_P - 0{,}403\,\bar{z}_P = 0{,}915 \cdot 4{,}87 - 0{,}403 \cdot 40{,}13 = -11{,}73 \text{ mm},$$

$$z_{1P} = 0{,}915\,\bar{z}_P + 0{,}403\,\bar{y}_P = 0{,}915 \cdot 40{,}13 + 0{,}403 \cdot 4{,}87 = 38{,}68 \text{ mm}.$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor centrale principale sunt

$$M_{y1} = M_{\bar{y}} \cos\theta_1 = -2 \cdot 10^5 \cdot \cos\left(-23{,}77^0\right) = -1{,}83 \cdot 10^5 \text{ Nmm},$$

$$M_{z_1} = -M_{\bar{y}} \sin\theta_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot \sin\left(-23{,}77^0\right) = -0{,}806 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

Rezultă că tensiunea normală în punctul *P* este

$$\sigma_P = -\frac{M_{z_1}}{I_2} y_{1_P} + \frac{M_{y_1}}{I_1}\ z_{1_P} =$$

$$= -\frac{-0{,}806 \cdot 10^5}{3{,}59 \cdot 10^4}\left(-11{,}73\right) + \frac{-1{,}83 \cdot 10^5}{20{,}072 \cdot 10^4}\ 38{,}68 = -61{,}6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Se obține deci același rezultat ca prin prima metodă, însă efortul de calcul este mai mare.

Exemplul 8.7

Pentru bara din figura 8.E7, *a,* să se calculeze tensiunile normale în punctele *A*, *B* şi *D* ale secțiunii din încastrare. Bara este din oțel cornier cu aripi neegale LL $80\times65\times10$ (fig. 8.E7, *b*).

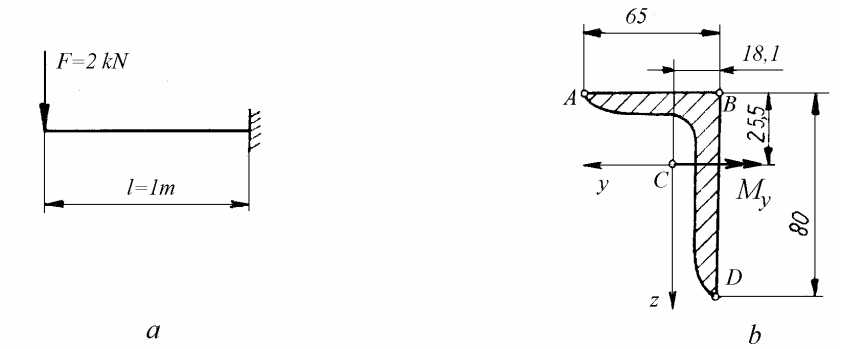


Fig. 8.E7

Rezolvare

Pentru profilul LL $80\times65\times10$, în STAS 425-80 se găsesc momentele de inerție ale secțiunii: $I_y=82{,}2\cdot10^4$ mm^4, $I_z=48{,}3\cdot10^4$ mm^4. Cu ajutorul relației (7.39), cunoscând momentele de inerție principale, se poate calcula momentul centrifugal $I_{yz}=36{,}92\cdot10^4$ mm^4.

Aplicând formula (8.30) se obține

$$\sigma_A=-2\cdot10^6\cdot\frac{48{,}3\cdot(-25{,}5)-36{,}92\cdot46{,}9}{82{,}2\cdot48{,}3-36{,}92^2}\cdot10^{-4}=227{,}3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_B=-2\cdot10^6\cdot\frac{48{,}3\cdot(-25{,}5)-36{,}92\cdot(-18{,}1)}{82{,}2\cdot48{,}3-36{,}92^2}\cdot10^{-4}=43{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_D=-2\cdot10^6\cdot\frac{48{,}3\cdot54{,}5-36{,}92\cdot(-18{,}1)}{82{,}2\cdot48{,}3-36{,}92^2}\cdot10^{-4}=-253{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Exemplul 8.8

Bara în consolă din figura 8.E8 are lungimea $\ell=1\,\text{m}$ şi este solicitată în capătul liber de o forță $F=3\,\text{kN}$ înclinată cu unghiul $\alpha=20^0$ față de verticală. Se cere tensiunea normală maximă şi punctul unde apare.

Rezolvare

Secțiunea transversală se împarte în două dreptunghiuri (fig. 8.E8, *b*). Se calculează poziția centrului de greutate față de o axă care coincide cu latura din stânga

$$y_G = \frac{100 \cdot 10 \cdot 50 + 90 \cdot 10 \cdot 5}{100 \cdot 10 + 90 \cdot 10} = 28{,}68 \text{ mm}.$$

Față de latura de sus se obține $z_G = 28{,}68$ mm.

Se trasează axele *Gy* şi *Gz* ca în figura 8.E8, *b*.

Se calculează momentele de inerție față de axele *Gy* şi *Gz*

$$I_y = I_z = 180 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \; I_{yz} = 106{,}59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

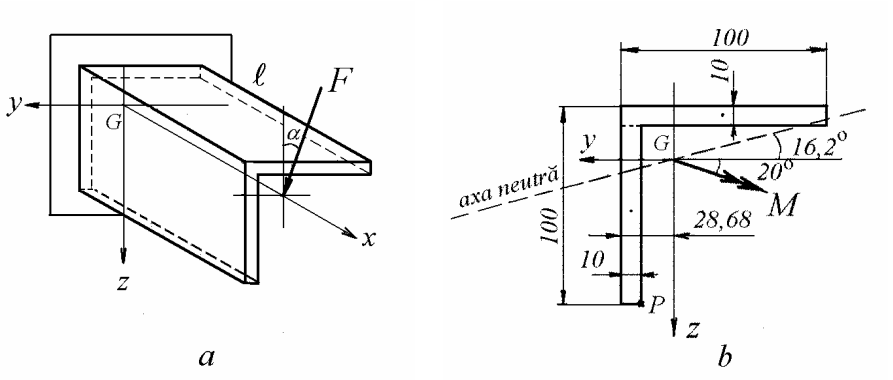


Fig. 8.E8

Momentul încovoietor este maxim în încastrare

$$M = F\ell = 3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor sunt

$$M_y = -M \cos 20^0 = -3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9397 = -2{,}82 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$M_z = M \sin 20^0 = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}342 = 1{,}026 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Ecuația axei neutre (8.29) este

$$z = \frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{I_z M_y + I_{yz} M_z} y = \frac{106{,}59 \cdot (-2{,}819) + 180 \cdot 1{,}026}{180 \cdot (-2{,}819) + 106{,}59 \cdot 1{,}026} y = 0{,}291 \, y.$$

Înclinarea axei neutre față de axa *Gy* (v. fig.8.E8, *b*) este

$$\beta = \text{arctg } 0{,}291 = 16{,}22^0.$$

Tensiunile normale (8.28) au expresia

$$\sigma_x = 0{,}55\, y - 1{,}89\, z\,.$$

În punctul cel mai îndepărtat de axa neutră $P\left(18{,}68;\, 71{,}32\right)$ tensiunea maximă este

$$\sigma_P = -124{,}7\ \mathrm{N/mm^2}\,.$$

Exemplul 8.9

O bară în consolă cu secțiunea în Z (fig. 8.E9, *a*) are lungimea $\ell = 2\ \mathrm{m}$ şi este solicitată la capătul liber de o forță $F = 1\ \mathrm{kN}$ înclinată la 30^0 față de verticală. Se cere tensiunea normală maximă şi punctul unde aceasta apare.

Rezolvare

Secțiunea transversală se împarte în trei dreptunghiuri, ca în figura 8.E9, *b*. Datorită antisimetriei, centrul de greutate se află la mijlocul figurii. Se trasează axele centrale neprincipale *Gy* şi *Gz*.

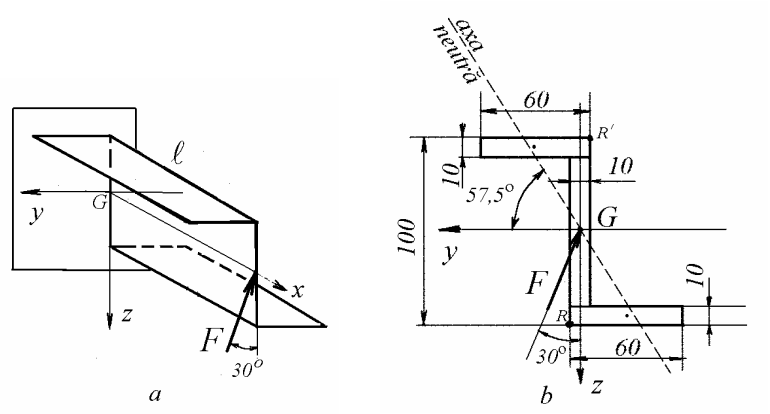


Fig. 8E.9

Momentele de inerție față de axele *Gy* şi *Gz* sunt

$$I_y = 286{,}66\cdot 10^4\ \mathrm{mm^4}\,,\ I_z = 111{,}66\cdot 10^4\ \mathrm{mm^4}\,,\ I_{yz} = -135\cdot 10^4\ \mathrm{mm^4}\,.$$

În încastrare, momentul încovoietor maxim este

$$M = F\ell = 10^3\cdot 2\cdot 10^3 = 2\cdot 10^6\ \mathrm{Nmm}\,.$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor *Gy* şi *Gz* sunt

$$M_y = M\cos 30^0 = 1{,}732\cdot 10^6\ \mathrm{Nmm}\,,\ M_z = -M\sin 30^0 = -10^6\ \mathrm{Nmm}\,.$$

Ecuația axei neutre (8.29) este

$$z=\frac{I_{yz}\,M_y+I_y M_z}{I_z\,M_y+I_{yz}\,M_z}\,y=\frac{(-135)\cdot 1{,}732+286{,}66\cdot(-1)}{111{,}66\cdot 1.732+(-135)\cdot(-1)}\,y=-1{,}585\,y\,.$$

Înclinarea axei neutre față de axa *Gy* (v. fig.8.E9, *b*) este

$$\beta=\operatorname{arctg}(-1{,}585)=-57{,}75^0\,.$$

Tensiunile normale (8.28) au expresia

$$\sigma_x=3{,}7755\,y+2{,}382\,z\,.$$

În punctul cel mai îndepărtat de axa neutră $R(5,\,50)$ tensiunea normală maximă este $\sigma_R=138\ \mathrm{N/mm^2}$.

8.3 Tensiuni de forfecare la încovoierea simplă

Deobicei încovoierea este rezultatul acțiunii unor sarcini transversale asupra barelor. În general, în secțiunea transversală acționează, pe lângă momentul încovoietor, care produce tensiuni normale, şi o forță tăietoare, care produce tensiuni tangențiale şi deci, deformații suplimentare de lunecare. Solicitarea produsă de acțiunea simultană a momentului încovoietor şi a forței tăietoare se mai numeşte *încovoiere simplă*.

Din considerente bazate pe dualitatea tensiunilor tangențiale, în dreptul fibrelor extreme tensiunile tangențiale paralele cu forța tăietoare sunt nule, având diverse legi de variație pe înălțimea secțiunii, funcție de forma acesteia. Datorită distribuției neliniare a tensiunilor tangențiale, apare o *deplanare* a secțiunii transversale, deci ipoteza lui Bernoulli nu mai poate fi utilizată la stabilirea formulei tensiunilor normale.

Se constată că la bare cu secțiuni având raportul h/ℓ (între înălțimea secțiunii şi lungimea barei) relativ mic ($<1/10$), calculul tensiunilor normale se poate face cu formulele deduse pentru încovoierea pură. La barele care au raportul h/ℓ relativ mare, formula lui Navier (8.10) şi, în general, formulele stabilite în Teoria elasticității pentru învoierea pură dau valori ale tensiunilor normale mai mari decât cele reale.

În continuare, considerând valabilă distribuția liniară a tensiunilor normale de încovoiere, care neglijează deplanarea, se deduce o *expresie aproximativă a tensiunilor tangențiale* produse de forța tăietoare, utilizând numai o condiție de

echilibru. Condiţiile reale privind geometria deformaţiilor se pot folosi numai la stabilirea unei soluţii exacte, prin metodele Teoriei elasticităţii.

8.3.1 Formula lui Juravski

Fie un element de lungime dx, detaşat dintr-o bară solicitată la încovoiere simplă (fig. 8.8), în lungul căruia se consideră că forţa tăietoare este constantă. În secţiunea din stânga acţionează eforturile M_y şi T_z, iar în secţiunea din dreapta acţionează $M_y + \mathrm{d}M_y$ şi T_z.

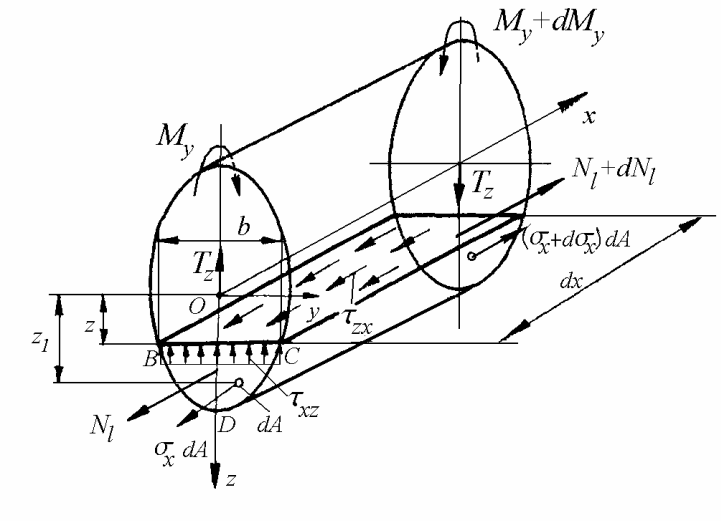


Fig. 8.8

Se secţionează apoi acest element cu un plan paralel cu xOy, la distanţa z de acesta, obţinându-se elementul desenat cu linii mai groase. Pe feţele frontale ale acestui element acţionează tensiuni normale σ_x, respectiv $\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x$, iar pe faţa superioară acţionează tensiuni tangenţiale, complementare celor produse de forţa tăietoare în secţiunea transversală.

Ipoteza lui Juravski. Se consideră că în lungul unei linii BC, paralele cu axa neutră Oy, *componentele tensiunilor tangenţiale* τ_{xz} *paralele cu forţa tăietoare sunt uniform distribuite*.

Rezultanta forţelor elementare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ produse de tensiunile normale pe faţa din stânga a elementului considerat este

$$N_\ell = \int\limits_{BCD} \sigma_x \, \mathrm{d}A = \int\limits_{BCD} \frac{M_y \, z_1}{I_y} \, \mathrm{d}A = \frac{M_y}{I_y} \int\limits_{BCD} z_1 \, \mathrm{d}A = \frac{M_y \, S_y^*}{I_y}, \qquad (8.35)$$

unde S_y^* este momentul static al suprafeței *BCD* față de axa centrală *Oy*.

Pe fața din dreapta a elementului acționează forța

$$N_\ell + \mathrm{d}N_\ell = \frac{\left(M_y + \mathrm{d}M_y\right) S_y^*}{I_y},$$

iar pe fața superioară acționează forța longitudinală de forfecare $\tau_{zx} \, b \, \mathrm{d}x$, unde $b = BC$.

Ecuația de echilibru a forțelor ce acționează asupra elementului considerat se scrie

$$N_\ell + \tau_{zx} \, b \, \mathrm{d}x - \left(N_\ell + \mathrm{d}N_\ell\right) = 0 .$$

Se obține

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{\mathrm{d}N_\ell}{\mathrm{d}x}, \qquad (8.36)$$

sau

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{M_y \, S_y^*}{I_y} \right) = \frac{1}{b} \frac{S_y^*}{I_y} \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} .$$

Deoarece $\dfrac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = T_z$ și $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, rezultă expresia tensiunilor tangențiale

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{T_z \, S_y^*}{b \, I_y}} \qquad (8.37)$$

stabilită de D. I. Juravski (1854).

Formula (8.37) este strict valabilă doar pentru bare de secțiune constantă, având *forța tăietoare constantă* în lungul barei. Totuși se constată că, la bare cu dimensiuni transversale mult mai mici decât lungimea barei, eroarea introdusă de variația forței tăietoare în lungul barei este relativ mică.

Se observă că τ_{xz} depinde de raportul S_y^* / b, deci de ordonata *z* la nivelul căreia se evaluează tensiunile tangențiale.

Secțiunea dreptunghiulară

În cazul secțiunii dreptunghiulare (fig. 8.9), $I_y = \dfrac{b\,h^3}{12}$ şi

$$S_y^* = b\left(\frac{h}{2}-z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right) = \frac{b\,h^2}{8}\left(1-\frac{4\,z^2}{h^2}\right),$$

deci

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\,S_y^*}{b\,I_y} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{b\,h}\left(1-\frac{4\,z^2}{h^2}\right). \qquad (8.38)$$

Componentele paralele cu forța tăietoare ale tensiunilor tangențiale au o distribuție parabolică pe înălțimea secțiunii. Valoarea maximă, la nivelul axei neutre, este

$$\tau_{xz\,max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A} \qquad (8.39)$$

unde $A = b\,h$.

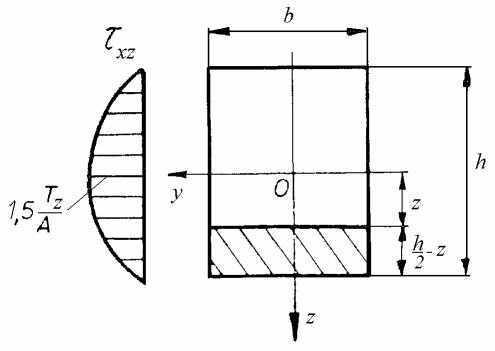


Fig. 8.9

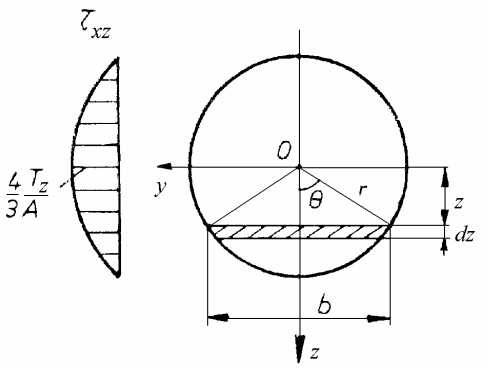


Fig. 8.10

Secțiunea circulară

În cazul secțiunii circulare de rază r (fig. 8.10), $b = 2\,r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $dz = -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, iar aria suprafeței elementului haşurat este

$$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}z = -2\,r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Momentul static al suprafeței situate sub coarda b, calculat față de axa Oy, este

$$S_y^* = \int_0^\theta z\,dA = \int_0^\theta 2\,r^3\,\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\,r^3\,\sin^3\theta\,.$$

Rezultă expresia tensiunilor tangențiale paralele cu forța tăietoare

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\,S_y^*}{b\,I_y} = \frac{T_z\,\dfrac{2}{3}\,r^3\,sin^3\theta}{2\,r\,\sin\theta\,\dfrac{\pi\,r^4}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{A}\,\sin^2\theta\,, \tag{8.40}$$

unde aria cercului $A = \pi\,r^2$.

Valoarea maximă, la nivelul axei neutre, este

$$\tau_{xz_{max}} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{A}\,. \tag{8.41}$$

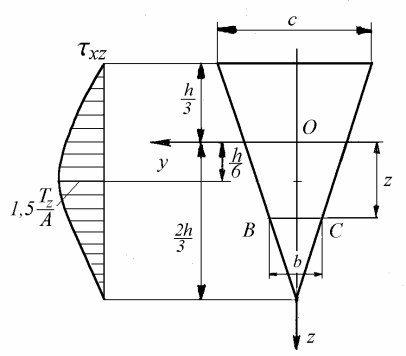


Fig. 8.11

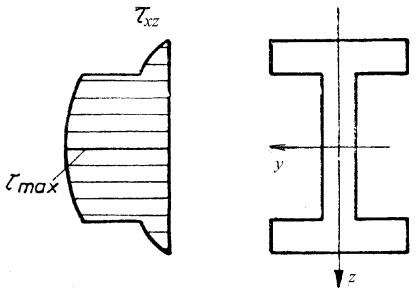


Fig. 8.12

Secțiunea triunghiulară

În cazul secțiunii triunghiulare simetrice, cu baza *c* şi înălțimea *h* (fig. 8.11), momentul de inerție axial este $I_y = \dfrac{c\,h^3}{36}$ iar momentul static al triunghiului situat sub linia *BC*, la nivelul căreia se calculează tensiunile, este

$$S_y^* = \frac{1}{2}\,b\left(\frac{2\,h}{3} - z\right)\left[z + \frac{1}{3}\left(\frac{2\,h}{3} - z\right)\right] = \frac{b}{3}\left(\frac{2\,h}{3} - z\right)\left(\frac{h}{3} + z\right),$$

deci tensiunile tangențiale paralele cu forța tăietoare au expresia

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y^*}{b\, I_y} = \frac{12\, T_z}{c\, h^3}\left(\frac{2\,h}{3} - z\right)\left(\frac{h}{3} + z\right). \qquad (8.42)$$

Tensiunea tangențială maximă nu mai apare la nivelul axei neutre, ci la distanța $z = h/6$ spre vârful triunghiului, având valoarea

$$\tau_{xz\,max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A}, \qquad (8.43)$$

unde aria triunghiului $A = ch/2$.

Secțiunea în formă de **I**

La secțiunea în formă de **I** (fig. 8.12), diagrama tensiunilor tangențiale de forfecare τ_{xz} este formată din arce de parabolă, cu o discontinuitate în dreptul trecerii de la tălpi la inima profilului, unde coarda *b* are o variație bruscă.

Comparație între valorile tensiunilor σ *şi* τ

Fie bara din figura (8.13), cu secțiunea dreptunghiulară $b \times h$.

Tensiunea normală maximă apare în încastrare şi are valoarea

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y\,max}}{W_y} = \frac{F\,\ell}{\frac{b\,h^2}{6}} = \frac{6\,F\,\ell}{b\,h^2}.$$

Tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A} = \frac{3\,F}{2\,b\,h}.$$

Se observă că raportul

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4\,\ell}$$

depinde de raportul h/ℓ între înălțimea secțiunii transversale şi lungimea barei. La barele cu raportul $h/\ell < 1/10$, la care de obicei ipoteza lui Bernoulli este verificată, tensiunile tangențiale sunt neglijabile față de cele normale. Dimensionarea se face numai pe baza momentului încovoietor.

8.3.2 Lunecarea longitudinală

Se consideră două bare suprapuse (fig. 8.14, *a*) în consolă, solicitate la încovoiere de forța *F*.

Dacă barele nu sunt îmbinate şi se neglijează frecarea pe suprafețele de contact, deformarea are loc ca în figura 8.14, *b*. Fibrele de sus ale barei de jos sunt întinse, în timp ce fibrele de jos ale barei de sus sunt comprimate, cele două suprafețe în contact lunecând una față de cealaltă. Fenomenul se numeşte *lunecare longitudinală.*

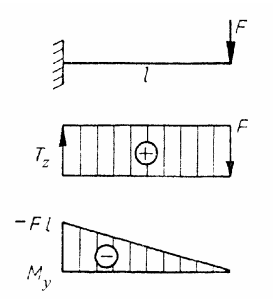


Fig. 8.13

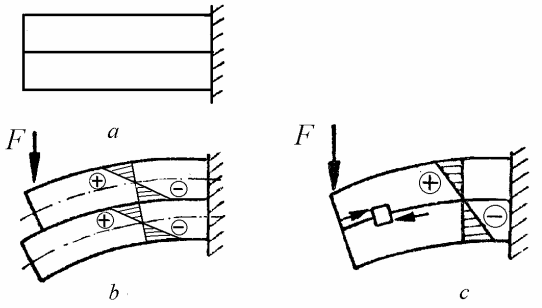


Fig. 8.14

Dacă barele sunt îmbinate, ele lucrează împreună la încovoiere, ca o singură grindă compusă. Elementele de asamblare împiedică lunecarea longitudinală, fiind solicitate la forfecare (fig. 8.14, *c*). Dimensionarea acestora se face pe baza valorii forței de lunecare longitudinală N_ℓ.

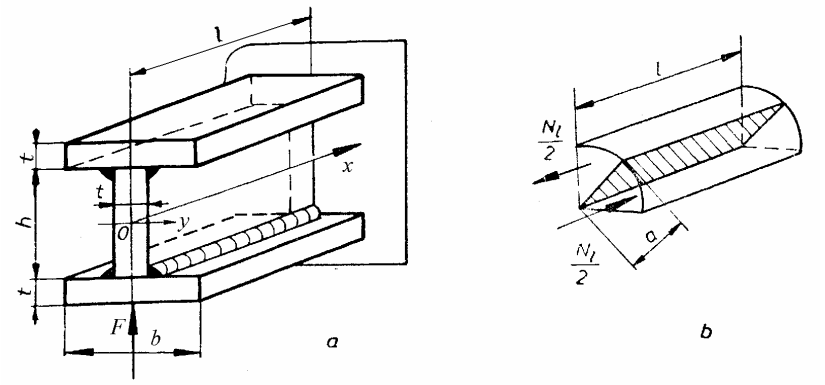


Fig. 8.15

Fie grinda metalică din figura 8.15,*a* îmbinată prin sudare. Conform relațiilor (8.36) şi (8.37), forța de lunecare are expresia

$$N_\ell = \int_\ell \tau_{xz}\, b\, \mathrm{d}x = \frac{T_z\, S_y^*}{I_y}\, \ell\,,$$

unde

$$S_y^* = b\,t\,\frac{h+t}{2}, \quad I_y = \frac{b\,(h+2\,t)^3}{12} - \frac{(b-t)\,h^3}{12}, \quad T_z = F\,.$$

Cordonul de sudură este solicitat la forfecare (fig. 8.15, *b*). În planul de forfecare (haşurat) se dezvoltă tensiuni tangenţiale. Considerând că acestea sunt uniform distribuite, rezultă

$$\tau = \frac{N_\ell}{2\,a\,\ell},$$

deci forţa capabilă a unui cordon continuu de sudură este

$$N_{cap} = \tau_{as}\,a\,\ell\,,$$

unde τ_{as} este rezistenţa admisibilă la forfecare a cordonului de sudură.

Egalând forţa de lunecare cu forţa capabilă a două cordoane de sudură, rezultă

$$\frac{T_z\,S_y^*}{I_y}\,\ell = 2\,\tau_{as}\,a\,\ell\,,$$

deci grosimea minimă a cordonului de sudură este

$$a = \frac{S_y^*\,T_z}{2\,I_y\,\tau_{as}},$$

unde S_y^* este momentul static al suprafeţei corespunzătoare tălpii secţiunii, calculat faţă de axa *Oy*.

8.3.3 Modelul de bară cu forfecare

Variaţia neliniară a tensiunilor tangenţiale pe înălţimea secţiunii transversale a unei bare solicitate la încovoiere simplă (fig. 8.16, *a*) produce deformaţii de lunecare distribuite neuniform pe înălţimea secţiunii (fig. 8.16, *b*), deci deplanarea acesteia (fig. 8.16, *c*). La secţiuni dublu simetrice, lunecările sunt maxime la mijlocul secţiunii şi nule în fibrele extreme.

Se poate lucra cu un model de bară bazat pe o *ipoteză modificată a secţiunii plane*. Se admite că *o secţiune iniţial plană rămâne plană* după solicitarea barei la încovoiere simplă, dar *nu mai este perpendiculară pe fibra medie deformată* a barei (fig. 8.16, *e*).

Se consideră că rotirea secţiunii are o componentă datorită tensiunilor normale (fig. 8.16, *d*) şi o componentă *constantă* datorită lunecărilor produse de tensiunile tangenţiale. Fie γ_m unghiul de lunecare specifică mediu, constant pe

înălțimea secțiunii (fig. 8.16, *e*). Pe baza legii lui Hooke (3.22), se calculează o tensiune tangențială medie, constantă pe înălțimea secțiunii, $\tau_m = G\,\gamma_m$.

Forța tăietoare în secțiune este

$$T_z = \int_A \tau \,\mathrm{d}A,$$

unde $\tau = \tau_{xz}$ este tensiunea tangențială paralelă cu forța tăietoare.

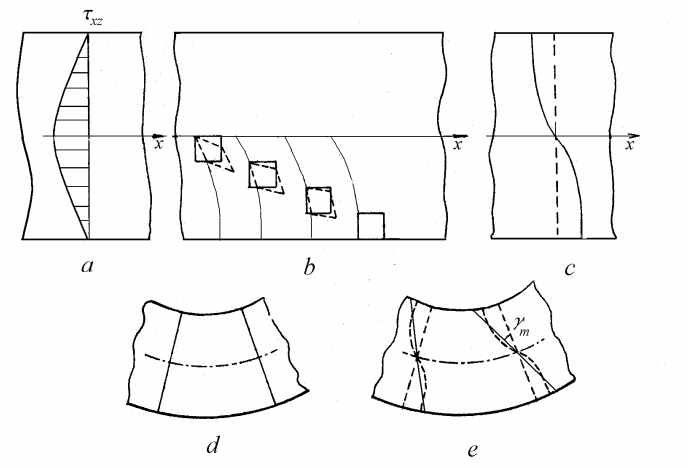


Fig. 8.16

Tensiunea tangențială medie se calculează cu relația

$$\tau_m = \frac{T_z}{A_f}$$

unde

$$A_f = k_f\, A \tag{8.44}$$

este o arie echivalentă numită *aria de forfecare*, iar k_f este *factorul de forfecare*.

Pentru determinarea factorului k_f, se egalează expresiile energiei de deformație la forfecare pe unitatea de lungime a barei, bazate pe tensiunile tangențiale reale şi pe tensiunea tangențială medie

$$\int_A \frac{\tau^2}{2\,G}\,\mathrm{d}A = \frac{\tau_m^2}{2\,G}\,A_f = \frac{T_z^2}{2\,G\,A_f} = \frac{1}{2\,G\,k_f\,A}\left(\int_A \tau \,\mathrm{d}A\right)^2.$$

Rezultă formula factorului de forfecare

$$k_f = \frac{\left(\int_A \tau \, \mathrm{d}A\right)^2}{A \int_A \tau^2 \, \mathrm{d}A}. \tag{8.45}$$

Calcule mai precise bazate pe metodele Teoriei elasticității arată că, pentru secțiunea inelară, cu diametrul exterior *D* şi diametrul interior *d*, se obține

$$k_f = \frac{1}{\dfrac{7+6\nu}{6+6\nu} + \dfrac{20+12\nu}{6+6\nu}\left(\dfrac{d/D}{1+(d/D)^2}\right)^2}, \tag{8.46}$$

unde ν este coeficientul de contracție transversală al materialului barei.

La o bară cu secțiune circulară plină, din oțel, $k_f = 0{,}886$.

La secțiunea dreptunghiulară, factorul de forfecare are expresia

$$k_f = \frac{10\,(1+\nu)}{12+11\,\nu}, \tag{8.47}$$

independentă de raportul laturilor.

La o bară cu secțiune dreptunghiulară, din oțel, $k_f = 0{,}850$.

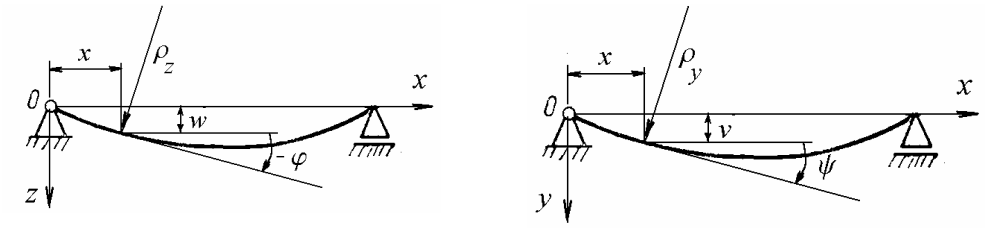
Modelul de bară cu deformații de forfecare este utilizat mai mult la studiul vibrațiilor barelor, unde se include şi un moment încovoietor distribuit liniar, datorit inerției la rotație a elementelor barei. *Modelul de bară Timoshenko* include atât efectul forfecării cât şi al inerției la rotație.

8.4 Deformații la încovoiere

Admițând valabilitatea ipotezei secțiunilor plane, studiul deformațiilor barelor drepte solicitate la încovoiere se reduce la studiul formei deformate a liniei care uneşte centrele de greutate ale secțiunilor transversale, denumită *fibra medie deformată*, sau *linia elastică* a barei. Din acest motiv, caracteristicile geometrice ale secțiunii barei care intervin în calculul deformațiilor la încovoiere se calculează față de axe centrale. Pentru simplificarea expunerii, se renunță la notația cu bară deasupra literei, utilizată în Capitolul 7.

Forma liniei elastice se defineşte prin doi parametri: *săgeata* - deplasarea liniară transversală şi *panta* (tangentei la linia elastică) sau deformația unghiulară - egală cu rotirea secțiunii transversale, dacă se neglijează forfecarea (fig. 8.17).

Se utilizează următoarele notații: deplasările liniare în lungul axelor *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt u, v, w, pozitive în sensul pozitiv al axelor. Deplasările unghiulare (rotirile) față de axele *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt θ, φ, ψ, pozitive conform regulii burghiului drept.



a *b*

Fig. 8.17

Se observă că la studiul deplasărilor în planul *xOz* (fig. 8.17, *a*), pantele au semn contrar rotirilor (sensul pozitiv este dat de rotirea axei *Oz* spre *Ox*). În planul *xOy* (fig. 8.17, *b*), semnele pantelor şi rotirilor coincid.

8.4.1 Deformații la încovoierea simetrică

Se vor studia deformațiile în planul *xOz* (fig. 8.17, *a*), pentru bare solicitate de forțe cuprinse într-un plan vertical de simetrie, sau de cupluri cu vectorul moment perpendicular pe acest plan.

Săgețile w sunt pozitive când deplasarea este în jos.

Pantele sunt

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}. \tag{8.48}$$

Curbura este dată de relațiile (8.2) şi (8.9)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_y}{E\,I_y}, \tag{8.49}$$

de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_y}{E\,I_y}. \tag{8.50}$$

Relația (8.50) se numeşte *ecuația diferențială a liniei elastice a barei* (L. M. H. Navier, 1826). Prin integrarea acestei ecuații se obțin expresiile analitice ale pantei şi săgeții în orice secțiune a barei.

La bare cu încărcare relativ simplă, având maximum două porțiuni cu expresii diferite ale momentului încovoietor, se poate aplica *metoda integrării analitice* a ecuației (8.50).

După prima integrare rezultă panta

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \int_{\ell} \left(-\frac{M_y}{E\,I_y} \right) \mathrm{d}x + C_1 . \tag{8.51}$$

După a doua integrare rezultă săgeata

$$w = \int_{\ell} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ell} \left[\int_{\ell} \left(-\frac{M_y}{E\,I_y} \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1\,x + C_2 . \tag{8.52}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină pe baza valorilor pantei şi săgeții în anumite puncte, deobicei din condițiile la limită (de rezemare) ale barei: săgeată nulă pe reazem simplu, săgeată şi pantă nulă în încastrare etc.

La stabilirea expresiei analitice a momentului încovoietor $M_y(x)$ se utilizează convenția de semne care a stat la baza obținerii relației (8.50).

Relațiile diferențiale de echilibru

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = T_z , \qquad \frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -p_z ,$$

conduc la ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{T_z}{EI_y} , \tag{8.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_z}{EI_y} . \tag{8.54}$$

Din ecuația (8.54) rezultă că pe porțiunile de bară fără sarcină distribuită, deci pentru $p_z = 0$, $w(x)$ este un polinom de gradul trei în x (derivata a patra este nulă). Deci deformata barei nu mai este un arc de cerc, ca la încovoierea pură, ci o curbă descrisă de un polinom de gradul trei, funcție de distanța x în lungul barei.

Deformata porțiunilor solicitate de o sarcină transversală uniform distribuită, $p_z = \text{const.}$, este descrisă de un polinom de gradul patru (derivata a cincea este nulă) şi, pe măsură ce legea de distribuție a sarcinii distribuite este mai complicată, creşte gradul polinomului care descrie deformata barei.

Bara în consolă încărcată cu o forță în capăt

Se consideră bara din figura 8.18 cu $EI_y = \text{const}$. Momentul încovoietor în secțiunea x are expresia

$$M_y(x) = -F\,\ell + F\,x\,.$$

Ecuația diferențială a liniei elastice a barei (8.50) este

$$EI_y\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -M_y(x) = F\,\ell - F\,x\,.$$

Prin două integrări succesive se obține

$$EI_y\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -EI_y\,\varphi = F\,\ell\,x - F\,\frac{x^2}{2} + C_1\,,$$

$$EI_y\,w = F\,\ell\,\frac{x^2}{2} - F\,\frac{x^3}{6} + C_1\,x + C_2\,.$$

Constantele de integrare se determină pe baza condițiilor la limită. În încastrare, panta şi săgeata sunt nule

$$\varphi\big|_{x=0} = 0\,, \qquad w\big|_{x=0} = 0\,.$$

Rezultă $C_1 = C_2 = 0$, deci expresiile pantei şi săgeții devin

$$-\varphi = \frac{F\ell^2}{EI_y}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{2\,\ell^2}\right),$$

$$w = \frac{F\ell^3}{EI_y}\left(\frac{x^2}{2\,\ell^2} - \frac{x^3}{6\,\ell^3}\right). \qquad (8.55)$$

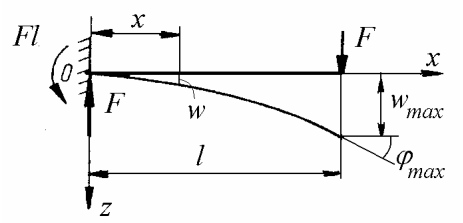


Fig. 8.18

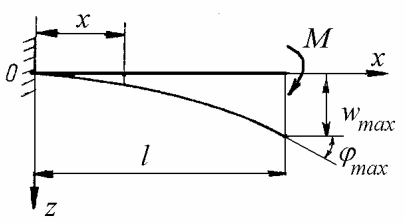


Fig. 8.19

În capătul barei, pentru $x = \ell$,

$$w_{max} = \frac{F\ell^3}{3EI_y}, \qquad -\varphi_{max} = \frac{F\ell^2}{2EI_y}. \tag{8.56}$$

Bara în consolă încărcată cu un moment în capăt

La bara din figura 8.19, cu $EI_y = \text{const.}$, momentul încovoietor este constant în lungul barei $M_y(x) = -M$.

Ecuația diferențială a liniei elastice a barei (8.50) este $EI_y \dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -M$.

Prin două integrări succesive, deoarece constantele de integrare sunt nule, se obține

$$-EI_y\,\varphi = M\,x, \qquad EI_y\,w = M\,\frac{x^2}{2}.$$

În capătul barei

$$w_{max} = \frac{M\ell^2}{2EI_y}, \qquad -\varphi_{max} = \frac{M\ell}{EI_y}. \tag{8.57}$$

Bara simplu rezemată, încărcată cu sarcină uniform distribuită

Momentul încovoietor în secțiunea x a barei din figura 8.20 are expresia

$$M_y(x) = \frac{q\,\ell}{2}\,x - \frac{q\,x^2}{2}.$$

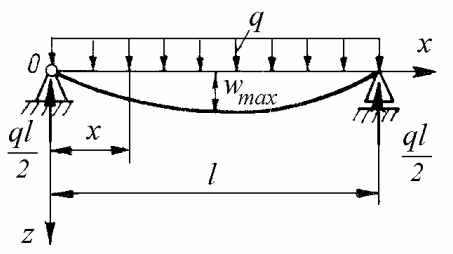


Fig. 8.20

Ecuația diferențială a liniei elastice (8.50) este

$$EI_y \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q\,\ell}{2}\,x + \frac{q\,x^2}{2}.$$

Se integrează de două ori

$$-EI_y\,\varphi = -\frac{q\,\ell}{4}x^2 + \frac{q\,x^3}{6} + C_1,$$

$$EI_y\,w = -\frac{q\,\ell}{12}x^3 + \frac{q\,x^4}{24} + C_1\,x + C_2,$$

apoi se determină constantele de integrare din condițiile ca pe reazeme săgeata să fie nulă

$$w\big|_{x=0} = 0, \qquad w\big|_{x=\ell} = 0.$$

Se obține $C_2 = 0$ și $C_1 = \dfrac{q\,\ell^3}{24\,EI_y}$.

Rezultă expresiile pantei și săgeții

$$-\varphi = \frac{q\,\ell^3}{EI_y}\left(\frac{1}{24} + \frac{x^3}{6\,\ell^3} - \frac{x^2}{4\,\ell^2}\right), \tag{8.58}$$

$$w = \frac{q\,\ell^4}{EI_y}\left(\frac{x}{24\,\ell} + \frac{x^4}{24\,\ell^4} - \frac{x^3}{12\,\ell^3}\right) = \frac{q}{24\,EI_y}\left(\ell^3\,x + x^4 - 2\,\ell\,x^3\right). \tag{8.59}$$

Săgeata maximă la mijlocul barei (pentru $x = \ell/2$) este

$$w_{max} = \frac{5\,q\,\ell^4}{384\,EI_y}. \tag{8.60}$$

Unghiul de deformație pe reazemul din stânga (pentru $x = 0$) este

$$-\varphi_1 = \frac{q\,\ell^3}{24\,EI_y}. \tag{8.61}$$

Săgețile și rotirile la grinzi utilizate frecvent sunt date în *Anexa 4*. Alte metode pentru calculul deformațiilor la încovoiere sunt prezentate în Capitolul 12.

8.4.2 Deformații la încovoierea oblică

În continuare, calculul se face față de axe centrale oarecare.

Săgețile w și v sunt pozitive în sensul pozitiv al axelor *Oz*, respectiv *Oy*.

Pantele sunt

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \qquad \psi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{8.62}$$

Curburile sunt date de relațiile (8.2), (8.19) şi (8.27)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_z\, M_y + I_{yz}\, M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \tag{8.63}$$

$$\kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_{yz}\, M_y + I_y\, M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.64}$$

Rezultă ecuațiile diferențiale decuplate ale săgeții

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I_z\, M_y + I_{yz}\, M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_{yz}\, M_y + I_y\, M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.65}$$

Utilizând relațiile diferențiale $\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -T_y$ şi $\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = T_z$, se obține prin derivare

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{I_z\, T_z - I_{yz}\, T_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = \frac{I_{yz}\, T_z - I_y\, T_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.66}$$

Utilizând relațiile diferențiale $\frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}x} = -p_y$ şi $\frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -p_z$ se obțin ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{I_z\, p_z - I_{yz}\, p_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{I_y\, p_y - I_{yz}\, p_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.67}$$

din care, pentru sarcini şi condiții la limită date, se obțin expresiile analitice ale componentelor *w* şi v ale deplasării transversale a punctelor liniei elastice a barei.

Bară în consolă cu secțiune nesimetrică

Fie o bară în consolă, din profil cornier cu aripi neegale aşezat ca în figura 8.21, acționată de o forță verticală aplicată în lungul axei centrale *Oz*, în capătul barei.

Deoarece nu există sarcini distribuite, ecuațiile (8.74) devin

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = 0,$$

deci deplasările au expresii de forma

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \qquad v(x) = B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4,$$

unde B_i şi C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sunt constante care se determină din condițiile la limită.

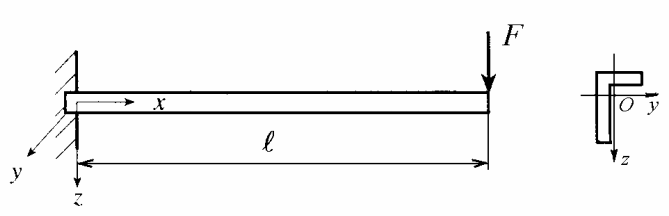


Fig. 8.21

În încastrare, condițiile la limită sunt

$$v(0) = 0\,, \qquad \psi(0) = 0\,, \qquad w(0) = 0\,, \qquad \varphi(0) = 0\,.$$

La capătul liber, condițiile la limită sunt

$$M_y(\ell) = 0\,, \qquad M_z(\ell) = 0\,, \qquad T_y(\ell) = 0\,, \qquad T_z(\ell) = F\,.$$

Deoarece ambele momente sunt zero, prima relație (8.72) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}(\ell) = 0\,.$$

Din prima relație (8.73) se obține

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}(\ell) = -\frac{I_z F}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\,.$$

Rezultă valorile constantelor de integrare

$$C_3 = C_4 = 0\,, \qquad C_1 = -\frac{I_z F}{6 E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\,, \qquad C_2 = -3\,\ell\, C_1\,,$$

deci expresia deplasării $w(x)$ este

$$w(x) = \frac{F I_z \left(3\ell - x\right) x^2}{6 E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\,.$$

Pentru deplasarea în direcția *y,* se obține $B_3 = B_4 = 0$ şi următoarele condiții la capătul liber

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}(\ell) = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3}(\ell) = \frac{I_{yz} F}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\,,$$

din care rezultă săgeata

$$v(x) = -\frac{F\, I_{yz}\,(3\ell - x)\,x^2}{6\,E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}.$$

Săgeata totală este

$$\delta = \left(v^2 + w^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Relația între componentele deplasării se scrie $w = -\dfrac{I_z}{I_{yz}} v$ care comparată cu ecuația axei neutre (8.31) arată că deplasarea se face pe o direcție perpendiculară pe axa neutră. Secțiunea barei fiind nesimetrică, forța verticală produce o deplasare pe o direcție înclinată față de verticală, deci încovoiere oblică.

8.4.3 Efectul forfecării

La încovoierea simplă, momentul încovoietor produce curbarea barei iar forța tăietoare produce deformații suplimentare datorită forfecării. Studiul efectului forfecării asupra deformațiilor de încovoiere se poate face adoptând ipoteza secțiunii plane modificată de J. A. C. Bresse (1859). Se introduce un unghi de lunecare specifică mediu, constant pe înălțimea secțiunii barei, şi o arie efectivă de forfecare (8.44), calculată înmulțind aria reală cu un factor de forfecare (8.45).

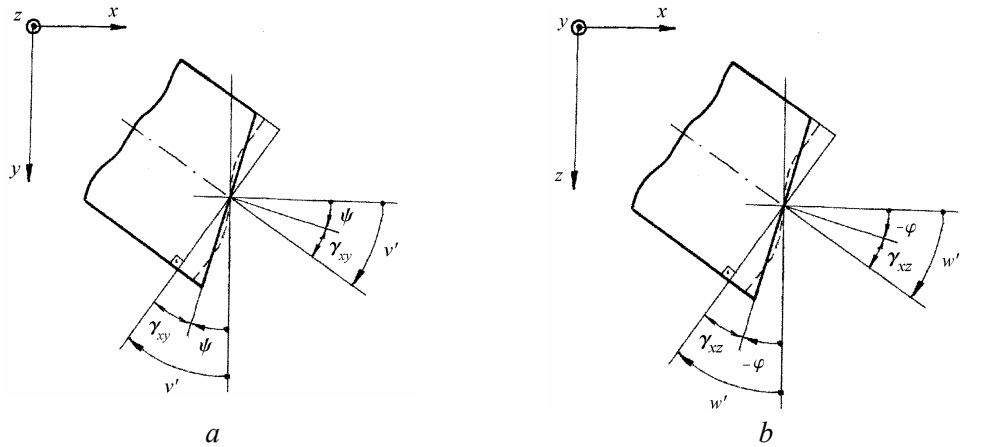


Fig. 8.22

Echilibrul

Ecuațiile diferențiale de echilibru (2.7) şi (2.8) sunt

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -T_y, \qquad \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = T_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}x} = -p_y, \qquad \frac{\mathrm{d}T_z}{\mathrm{d}x} = -p_z.$$

Geometria deformației

Curburile sunt date de relațiile (8.19)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}.$$

Din figura (8.22) se obțin relațiile între pantă, rotirea secțiunii şi lunecarea specifică medie

$$\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \psi, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \varphi, \qquad (8.68)$$

Relațiile între eforturi şi deformații specifice

$$\kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}, \qquad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{T_y}{GA_f}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{T_z}{GA_f},$$

unde $A_f = k_f A$, iar k_f este factorul de forfecare (8.45). În general, acesta are valori diferite în cele două plane *xOy* şi *xOz*, dar în continuare se va considera constant.

Eliminând curburile şi lunecările specifice medii, se obține

$$M_z = EI_z \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}, \qquad M_y = EI_y \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x},$$

$$T_y = GA_f \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \psi \right), \qquad T_z = GA_f \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \varphi \right).$$

Eliminând momentele încovoietoare şi forțele tăietoare, rezultă ecuațiile diferențiale ale rotirilor şi săgeților

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - GA_f \left(\psi - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right) = 0, \; EI_y \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} - GA_f \left(\varphi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right) = 0, \quad (8.69)$$

$$GA_f\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)=p_y\,,\qquad GA_f\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=-p_z\,. \tag{8.70}$$

Din relațiile (8.69) se observă că la modelul de bară cu forfecare săgeţile şi rotirile sunt cinematic independente.

Exemplul 8.10

O scândură de susținere a acoperişului, simplu rezemată pe căpriori înclinați cu unghiul α față de orizontală, este încărcată cu o sarcină verticală uniform distribuită q rezultând din greutatea țiglelor (fig. 8.E10). Se cere a) să se determine valoarea maximă admisibilă a acestei sarcini pentru a nu se depăşi în lemn rezistența admisibilă $\sigma_a = 10\,\mathrm{MPa}$; b) săgeata totală a scândurii la mijlocul deschiderii. Se dau $\alpha = 25^0$, $b = 180\,\mathrm{mm}$, $h = 50\,\mathrm{mm}$, $\ell = 2\,\mathrm{m}$, $E = 10\,\mathrm{GPa}$.

Rezolvare

Scândura este solicitată la încovoiere oblică.

Ecuația axei neutre (8.34) este

$$\frac{z}{y}=\mathrm{tg}\alpha\,\frac{I_y}{I_z}=\mathrm{tg}\alpha\,\frac{h^2}{b^2}=\mathrm{tg}\,25^0\,\frac{50^2}{180^2}=0{,}036=\mathrm{tg}\,2{,}06^0\,.$$

Tensiunea maximă apare în punctul *P*, de coordonate $y_P=-b/2$, $z_P=h/2$, şi în colțul opus. La mijlocul scândurii, momentul încovoietor este $q\,\ell^2/8$. Egalând tensiunea maximă cu rezistența admisibilă, relația (8.33) se scrie

$$\sigma_P=\sigma_a=\frac{q\ell^2}{8}\left(\frac{\sin\alpha}{I_z}\,\frac{b}{2}+\frac{\cos\alpha}{I_y}\,\frac{h}{2}\right).$$

Înlocuind valorile numerice se obține $q = 1{,}465\,\mathrm{N/mm}$.

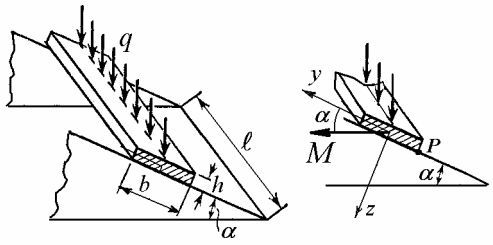


Fig. 8.E10

La mijlocul deschiderii, săgeata totală este rezultanta componentelor în lungul axelor principale de inerție (8.67)

$$f = \frac{5\,q\,\ell^4}{384\,E}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{I_z^2}+\frac{\cos^2\alpha}{I_y^2}},$$

$$f = \frac{5\cdot 1{,}465\cdot 2^4\cdot 10^{12}}{384\cdot 10^4}\sqrt{\frac{0{,}4226^2}{\left(24{,}3\cdot 10^6\right)^2}+\frac{0{,}9063^2}{\left(1{,}875\cdot 10^6\right)^2}} = 14{,}76\ \text{mm}.$$

Exemplul 8.11

O grindă în consolă, cu secțiune Z $(t << b)$ este solicitată de o forță F ca în figura 8.E11, *a*. Să se calculeze unghiul α astfel încât punctul de aplicație al forței să se deplaseze pe direcția acesteia. Să se determine expresia deplasării verticale a punctului de aplicație al forței.

Rezolvare

Punctul de aplicație al forței se deplasează pe direcția acesteia dacă forța acționează în lungul unei axe centrale principale de inerție a secțiunii.

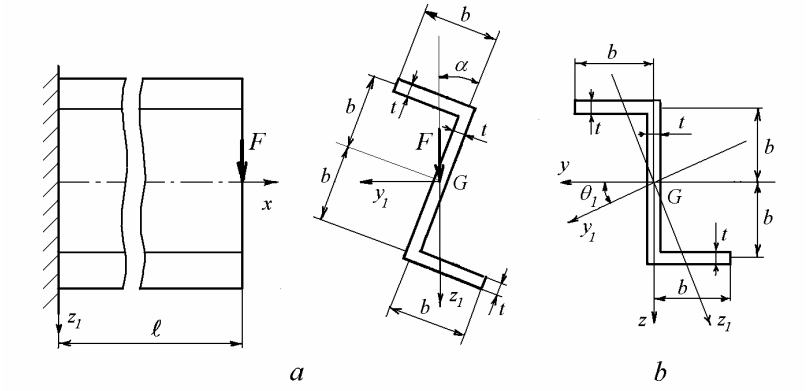


Fig. 8.E11

Se calculează momentele de inerție şi momentul centrifugal față de axele centrale *yOz* (fig. 8.E11, *b*):

$$I_y = \frac{t(2b)^3}{12}+2btb^2 = \frac{8}{3}tb^3, \qquad I_z = 2\left(\frac{tb^3}{12}+bt\frac{b^2}{4}\right)=\frac{2}{3}tb^3,$$

$$I_{yz} = bt\frac{b}{2}(-b)+bt\left(-\frac{b}{2}\right)b = -tb^3.$$

Direcțiile principale de inerție sunt definite de (7.36)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{-2}{\frac{2}{3} - \frac{8}{3}} = 1\,, \qquad \theta_1 = 22{,}5^0\,, \quad \theta_2 = 112{,}5^0\,.$$

Momentele de inerție principale (7.37) au valorile

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \left(\frac{5}{3} \pm \sqrt{2}\right) tb^3$$

$$I_1 = 3{,}0808\,tb^3\,,\ I_2 = 0{,}2524\,tb^3\,.$$

Dacă $\alpha = \theta_1$, forța F este dirijată în lungul direcției principale *2*, deci săgeata barei va fi

$$\delta = \frac{F\ell^3}{3EI_1}\,.$$

Se poate face o verificare, calculând componentele săgeții în lungul axelor *Oy* şi *Oz* (8.66)

$$v = -\frac{F\ell^3}{3E\,I_1 I_2}\left(I_{yz}\cos\theta_1 + I_y \sin\theta_1\right),\ w = \frac{F\ell^3}{3E\,I_1 I_2}\left(I_z \cos\theta_1 + I_{yz}\sin\theta_1\right),$$

apoi săgeata totală

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} = \frac{F\ell^3}{3EI_1}\,.$$

În sistemul de axe *yOz*, deplasarea se face pe direcția definită de

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{w}{v} = -\frac{I_z\cos\theta_1 + I_{yz}\sin\theta_1}{I_{yz}\cos\theta_1 + I_y\sin\theta_1} = -\frac{0{,}2332}{0{,}0966} = -2{,}414\,,\ \theta = -67{,}5^0$$

deci perpendiculară pe axa neutră (8.29)

$$\frac{z}{y} = \frac{I_{yz}\cos\theta_1 + I_y\sin\theta_1}{I_z\cos\theta_1 + I_{yz}\sin\theta_1} = 0{,}4142\,,$$

care coincide cu direcția principală *1*.

În expresia (8.29) s-a înlocuit $M_y = -F\ell\cos\theta_1$, $M_z = -F\ell\sin\theta_1$.

8.5 Bare cu secțiune variabilă

În lungul unei bare solicitate la încovoiere simplă, momentul încovoietor este variabil. La dimensionarea barelor cu secțiune constantă, se egalează tensiunea normală maximă, calculată în secțiunea în care acționează momentul încovoietor maxim, cu rezistența admisibilă la încovoiere. Rezultă o supradimensionare a barei în celelalte secțiuni, în care momentul încovoietor este mai mic, deci tensiunile efective sunt mai mici decât rezistența admisibilă.

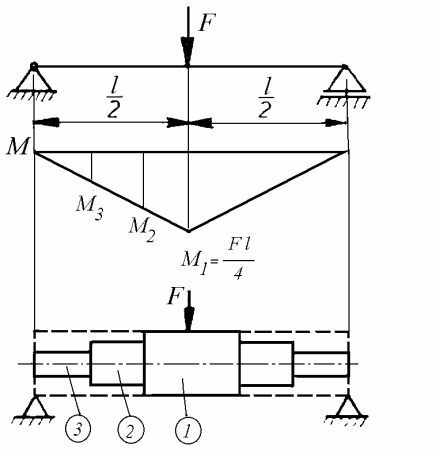


Fig. 8.23

O soluție mai rațională din punct de vedere al economiei de material, deci a reducerii greutății, o constituie barele cu secțiune variabilă. În afara condiției de rezistență, forma acestora poate fi determinată de condiții de montaj, de exemplu montarea rulmenților la capetele arborilor maşinilor.

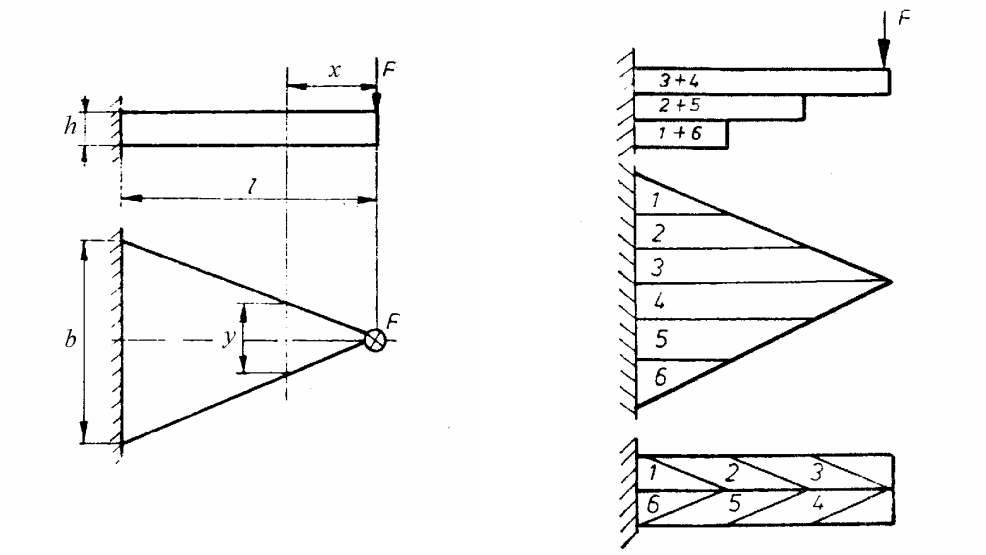
8.5.1 Arborele în trepte

La arborii maşinilor, forma tehnologică se realizează prin variația în trepte a diametrului.

Astfel, la bara din figura 8.23, tronsonul *1* se dimensionează pe baza momentului încovoietor M_1, tronsonul *2* - pe baza momentului M_2, tronsonul *3* - pe baza momentului M_3. Față de soluția cu secțiune constantă în lungul barei (linie întreruptă), se obține o bară mai uşoară, dar cu costul suplimentar al prelucrării. Desigur, la saltul de diametru, trebuie să se țină cont de concentrarea tensiunilor.

8.5.2 Grinda de egală rezistență

Se pot proiecta bare cu secțiune variabilă, realizate astfel încât în orice secțiune tensiunea normală maximă să aibă aceeaşi valoare, de exemplu, să fie egală cu rezistența admisibilă. Acestea se numesc *grinzi de egală rezistență* la încovoiere (P.S. Girard, 1798).



a *b*

Fig. 8.24

Trebuie îndeplinită condiția

$$\left|\sigma_{\max}(x)\right| = \frac{\left|M_y(x)\right|}{W_y(x)} = \sigma_a = const.,$$

deci modulul de rezistență axial W_y să aibă aceeaşi lege de variație în lungul barei ca şi momentul încovoietor M_y

$$W_y(x) = \frac{M_y(x)}{\sigma_a}. \qquad (8.71)$$

Pentru bara din figura 8.24, *a*, de grosime constantă *h* şi lățime variabilă $y(x) = \frac{b}{\ell}x$, relația (8.48) se scrie $\frac{y\,h^2}{6} = \frac{F\,x}{\sigma_a}$ deci

$$y = \frac{6F}{\sigma_a h^2} x . \qquad (8.72)$$

Variația liniară a lățimii duce la îndeplinirea condiției de egală rezistență la încovoiere.

Forma din figura 8.24, *a* este netehnologică. Prin tăierea barei în fâşii şi suprapunerea fâşiilor, ca în figura 8.24, *b*, apoi completarea cu structura simetrică, se realizează *arcul de foi* (E. Phillips, 1852), întâlnit în suspensia unor vehicule.

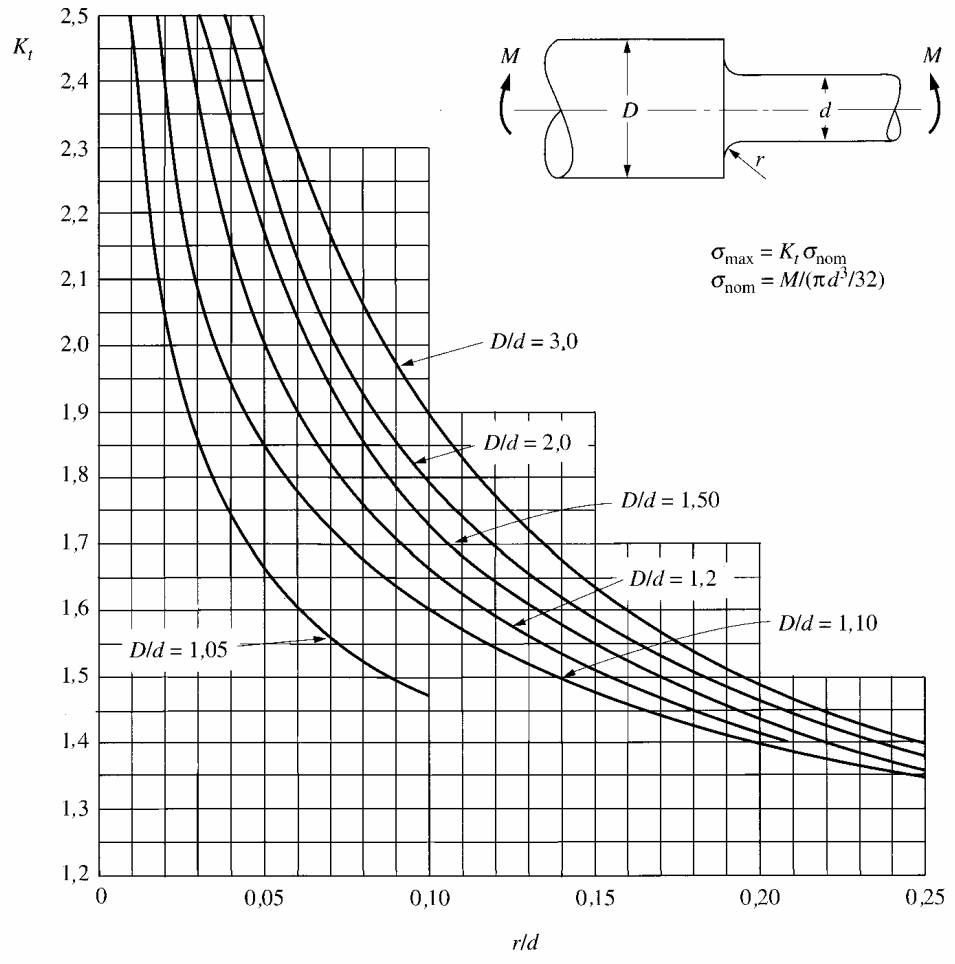


Fig. 8.25 [43]

8.5.3 Concentrarea tensiunilor la încovoiere

Ca şi la răsucire, discontinuitățile geometrice (de exemplu: arbore în trepte, găuri transversale, degajări, şanțuri de pană) produc variații locale importante ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât cele calculate în ipoteza constanței secțiunii transversale.

Tensiunile maxime se calculează cu relația

$$\sigma_{max} = K_t \, \sigma_{nom} ,$$

unde σ_{nom} este tensiunea obținută neglijând efectul de concentrare a tensiunilor iar K_t este *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice*.

Pentru un arbore în trepte solicitat la încovoiere, variația factorului de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 8.25, pentru cinci valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni.

Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

Exemplul 8.12

Să se dimensioneze grinda din figura 8.E12 din oțel cu $\sigma_a = 100\,\text{MPa}$ dacă $F = 1\,\text{kN}$ şi $\ell = 1{,}2\,\text{m}$. Să se calculeze deplasarea verticală a capătului liber considerând $E = 210\,\text{GPa}$.

Rezolvare

Pe porțiunea *1* momentul încovoietor maxim este $F\ell$, deci formula de dimensionare (8.14, *a*) se scrie

$$W_{y_{nec\,1}} = \frac{F\ell}{\sigma_a} = \frac{10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{100} = 12 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Pentru secțiunea circulară $\dfrac{\pi d_1^3}{32} = 12 \cdot 10^3$, de unde rezultă $d_1 = 10 \sqrt[3]{\dfrac{12 \cdot 32}{\pi}} = 49{,}6\,\text{mm}$. Se alege $d_1 = 50\,\text{mm}$.

Pe porțiunea *2* momentul încovoietor maxim este $F\ell/3$, deci

$$W_{y_{nec\,2}} = \frac{F\ell}{3\sigma_a} = 4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Modulul de rezistență axial este $\frac{\pi d_2^3}{32} = 4 \cdot 10^3$, de unde rezultă $d_2 = 10 \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 32}{\pi}} = 34{,}4 \text{ mm}$. Se alege $d_2 = 35 \text{ mm}$.

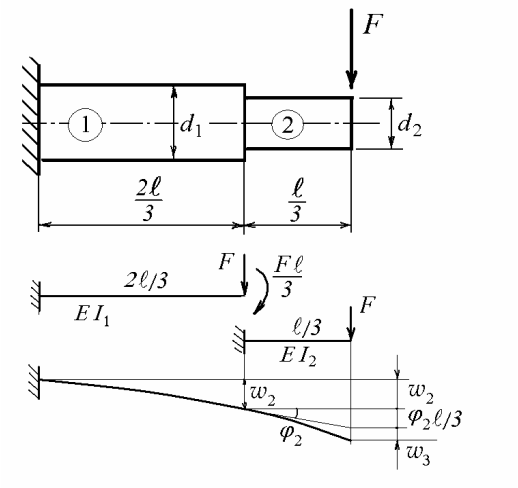


Fig. 8.E12

Momentele de inerție axiale sunt

$$I_{y1} = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi \cdot 50^4}{64} = 30{,}66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$I_{y2} = \frac{\pi d_2^4}{64} = \frac{\pi \cdot 35^4}{64} = 7{,}36 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Săgeata în capătul barei se calculează prin suprapunerea efectelor, utilizând formulele (8.56) şi (8.57). Porțiunea *1* este solicitată la capăt de o forță F şi de un moment $F\ell/3$, obținute prin reducerea forței F din capătul barei în secțiunea respectivă. Săgeata şi panta în capătul porțiunii *1* sunt

$$w_2 = \frac{F\left(\frac{2\ell}{3}\right)^3}{3EI_1} + \frac{\frac{F\ell}{3}\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2}{2EI_1} = \frac{14}{81}\frac{F\ell^3}{EI_1}, \quad \varphi_2 = \frac{F\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2}{2EI_1} + \frac{\frac{F\ell}{3}\frac{2\ell}{3}}{EI_1} = \frac{4}{9}\frac{F\ell^2}{EI_1}.$$

Porțiunea *2* este încastrată în porțiunea *1* şi solicitată la capăt de o forță *F,* deci săgeata este

$$w_3' = \frac{F\left(\frac{\ell}{3}\right)^3}{3EI_2} = \frac{1}{81}\frac{F\ell^3}{EI_2},$$

Săgeata totală în capătul barei este

$$w_3 = w_2 + \frac{\ell}{3}\varphi_2 + w_3' = \frac{26}{81}\frac{F\ell^3}{EI_1} + \frac{1}{81}\frac{F\ell^3}{EI_2},$$

$$w_3 = \frac{F\ell^3}{81EI_1}\left(26 + \frac{I_1}{I_2}\right) = \frac{10^3 \cdot 1{,}2^3 \cdot 10^9}{81 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 30{,}66 \cdot 10^4}\left(26 + \frac{30{,}66}{7{,}36}\right) = 10\ \text{mm}.$$

8.6 Bare cu secțiune eterogenă

Barele din materiale diferite sunt utilizate în structuri aeronautice, la grinzi din beton armat, la schiuri cu secțiune sandvici, având o inimă din lemn sau material plastic lipită între două fețe de aluminiu, la ambarcațiuni sportive etc. Fețele din materiale mai rezistente, placajele sau armăturile sunt astfel dispuse încât să preia tensiunile normale mari care apar la marginile de sus şi de jos ale barei, în timp ce materialul miezului preia tensiunile tangențiale maxime de forfecare şi poziționează fețele.

8.6.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică

Calculul la încovoiere pură al barelor de secțiune eterogenă se bazează pe relațiile stabilite pentru barele de secțiune omogenă, utilizând în plus condiția de deformație impusă de lipirea sau solidarizarea celor două materiale.

În figura 8.26, *a* se prezintă o bară cu secțiune dublu simetrică, în care inima *2* este placată cu fâşii identice din materialul *1*. În figura 8.26, *b* se arată o secțiune cu o singură axă de simetrie, la care materialul *2* este protejat la bază cu o platbandă din materialul *1*. Deobicei $E_1 > E_2$. Ambele bare sunt solicitate la încovoiere pură simetrică de un moment $M_y = M$.

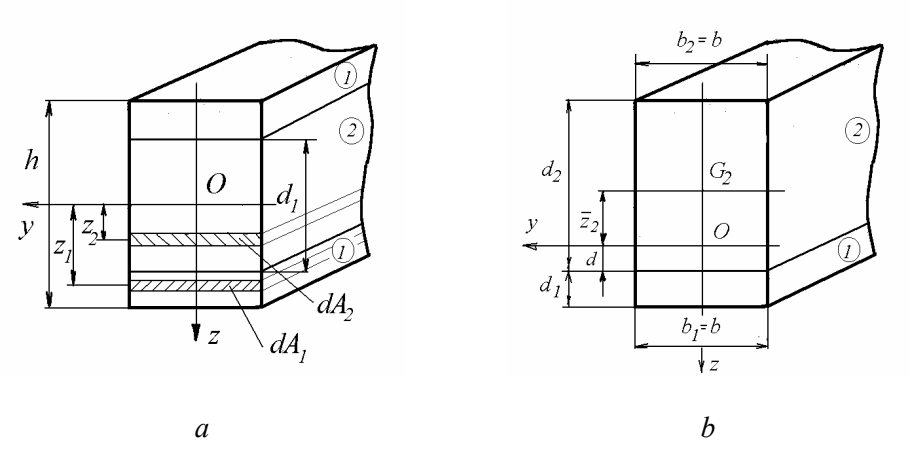
Condițiile de echilibru

Deoarece nu există forță axială

$$\int_{A_1} \sigma_1 \, \mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \, \mathrm{d}A_2 = 0.$$

Suma momentelor M_1 şi M_2 preluate de fiecare material este egală cu momentul încovoietor total M

$$M_1 + M_2 = \int_{A_1} z_1 \, \sigma_1 \, \mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} z_2 \, \sigma_2 \, \mathrm{d}A_2 = M \, .$$



a *b*

Fig. 8.26

Compatibilitatea deformațiilor

Unghiurile de rotire sunt egale pentru cele două materiale

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \, . \tag{8.73}$$

Relațiile tensiuni - deformații specifice

Din legea lui Hooke

$$\sigma_1 = E_1 \, \varepsilon_1 \, , \qquad \sigma_2 = E_2 \, \varepsilon_2 \, ,$$

se obține

$$\frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \, , \tag{8.74}$$

deci tensiunile sunt

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \, z_1}{I_1} = \frac{M \, E_1 \, z_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \, , \tag{8.75, a}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2 \, z_2}{I_2} = \frac{M \, E_2 \, z_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \, . \tag{8.75, b}$$

La secțiunea dublu simetrică

$$I_1 = \frac{b\,d_1^3}{12}, \qquad I_2 = 2\,b\,\frac{h-d_1}{2}\,\frac{h+d_1}{4} = \frac{b}{4}\left(h^2 - d_1^2\right).$$

La secțiunea cu o singură axă de simetrie, axa neutră nu mai trece prin centrul geometric al secțiunii. Pentru utilizarea relațiilor de mai sus, trebuie calculată poziția axei neutre. O metodă convenabilă constă în transformarea secțiunii eterogene într-o secțiune echivalentă, dintr-un singur material.

8.6.2 Secțiuni echivalente

La secțiunea din figura 8.26, *b*, se notează *d* distanța de la axa neutră la interfața între cele două materiale.

La nivelul interfeței, alungirile specifice în cele două materiale sunt egale

$$\frac{\sigma_1'}{E_1} = \frac{\sigma_2'}{E_2}, \tag{8.76}$$

dar tensiunile σ_1' şi σ_2' diferă

$$\sigma_1' = \frac{M_1\,d}{I_1}, \qquad \sigma_2' = \frac{M_2\,d}{I_2}.$$

Din relațiile (8.52) se obține

$$M = \frac{\sigma_1'}{d}\left(I_1 + \frac{E_2}{E_1}\,I_2\right) = \frac{\sigma_2'}{d}\left(I_2 + \frac{E_1}{E_2}\,I_1\right) \tag{8.77}$$

unde I_1 şi I_2 sunt momentele de inerție față de axa neutră.

Se observă că în relațiile (8.77) apare termenul $\frac{E_2}{E_1}\,I_2$, care se scrie

$$\frac{E_2}{E_1}\,I_2 = \frac{E_2}{E_1}\left(\frac{b_2\,d_2^3}{12} + b_2\,d_2\,\bar{z}_2^2\right) = \frac{E_2}{E_1}\,b_2\left(\frac{d_2^3}{12} + d_2\,\bar{z}_2^2\right) = b_1'\left(\frac{d_2^3}{12} + d_2\,\bar{z}_2^2\right)$$

unde $b_1' = \frac{E_2}{E_1}\,b_2$. Rezultă că acelaşi moment încovoietor se obține dacă partea de bară din materialul *2* este înlocuită cu o bară executată din materialul *1* de aceeaşi înălțime dar cu lățimea $\frac{E_2}{E_1}\,b_2$ (fig. 8.27, *a*). În acest mod se construieşte o *secțiune echivalentă* omogenă, numai din materialul *1*, la care poziția axei neutre şi

distribuția tensiunilor pe înălțime (fig. 8.27, *c*) se calculează mai ușor. Se poate apoi determina distribuția relă de tensiuni (fig. 8.27, *d*), utilizând relația (8.76).

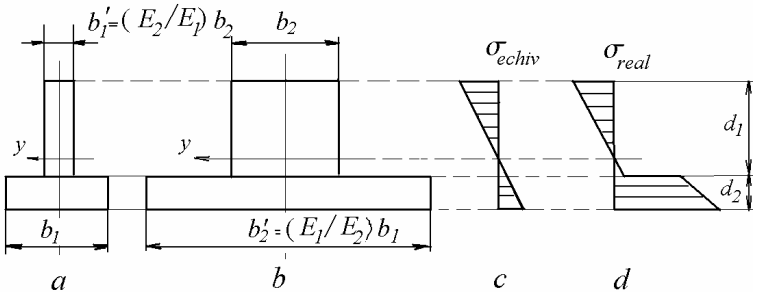


Fig. 8.27

Analog, materialul *1* poate fi înlocuit cu o fâşie echivalentă executată din materialul *2*, având aceeaşi înălțime d_1, dar lățimea $\frac{E_1}{E_2}b_1$ (fig. 8.27, *b*). În figura 8.27 s-a considerat $E_1 > E_2$ şi $b_1 = b_2$.

8.6.3 Proprietăți secționale echivalente

La bare cu secțiune eterogenă de formă oarecare, se pot utiliza proprietăți secționale echivalente, ponderate cu ajutorul unui modul de elasticitate de referință, notat în continuare E_0. Pentru aceasta, momentele statice şi momentele de inerție se redefinesc pe baza unei suprafețe elementare echivalente (fig. 8.28)

$$\mathrm{d}\widetilde{A} = \frac{E}{E_0}\mathrm{d}A\,. \tag{8.78}$$

Momentele statice echivalente față de axele oarecare *yOz* se definesc prin

$$\widetilde{S}_y = \int_A z\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{S}_z = \int_A y\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,. \tag{8.79}$$

Momentele de inerție echivalente sunt prin definiție

$$\widetilde{I}_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{I}_z = \int_A y^2\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{I}_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,. \tag{8.80}$$

Integralele de mai sus se calculează ca sume de proprietăți ponderate pentru suprafețele ocupate de fiecare material diferit.

În general, calculul tensiunilor se face față de axe centrale. Poziția *centrului de greutate echivalent C* se determină din condiția ca momentele statice echivalente în sistemul de coordonate central $\bar{y}C\bar{z}$ să fie nule:

$$\widetilde{S}_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}\,\mathrm{d}\widetilde{A} = \int_A \left(z - \widetilde{z}_C\right)\mathrm{d}\widetilde{A} = 0,$$
$$\widetilde{S}_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}\,\mathrm{d}\widetilde{A} = \int_A \left(y - \widetilde{y}_C\right)\mathrm{d}\widetilde{A} = 0,$$

de unde rezultă

$$\widetilde{y}_C = \frac{\widetilde{S}_{\bar{z}}}{\widetilde{A}}, \qquad \widetilde{z}_C = \frac{\widetilde{S}_{\bar{y}}}{\widetilde{A}}, \qquad \widetilde{A} = \frac{E}{E_0} A\,. \qquad (8.81)$$

Este evident că, în general, centrul de greutate echivalent *C* coincide cu centrul (de greutate) geometric *G* al suprafeței numai la secțiuni omogene.

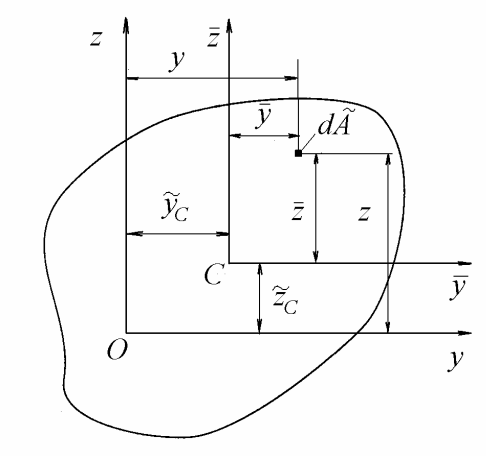


Fig. 8.28

Pentru simplificarea expunerii, coordonatele în sistemul central echivalent s-au notat tot cu bară deasupra literei.

Momentele de inerție față de axe centrale, paralele cu axele inițiale, sunt

$$\widetilde{I}_{\bar{y}} = \widetilde{I}_y - \widetilde{A}\,\widetilde{z}_C^2, \qquad \widetilde{I}_{\bar{z}} = \widetilde{I}_z - \widetilde{A}\,\widetilde{y}_C^2\,, \qquad \widetilde{I}_{\bar{y}\bar{z}} = \widetilde{I}_{yz} - \widetilde{A}\,\widetilde{y}_C\,\widetilde{z}_C\,. \qquad (8.82)$$

Tensiunile normale la încovoierea oblică, față de axe centrale oarecare, se calculează cu relația

$$\sigma_x = \frac{E}{E_0}\left(-\frac{\widetilde{I}_{\bar{y}\bar{z}}\,M_y + \widetilde{I}_{\bar{y}}\,M_z}{\widetilde{I}_{\bar{y}}\,\widetilde{I}_{\bar{z}} - \widetilde{I}_{\bar{y}\bar{z}}^2}\,\bar{y} + \frac{\widetilde{I}_{\bar{z}}\,M_y + \widetilde{I}_{\bar{y}\bar{z}}\,M_z}{\widetilde{I}_{\bar{y}}\,\widetilde{I}_{\bar{z}} - \widetilde{I}_{\bar{y}\bar{z}}^2}\,\bar{z}\right), \qquad (8.83)$$

iar față de axe centrale principale, pentru $M_z = 0$, cu relația

$$\sigma_x = \frac{E}{E_0}\frac{M_y}{\widetilde{I}_{\bar{y}}}\bar{z}\,, \tag{8.84}$$

echivalentă cu formula lui Navier.

8.6.4 Bare sandvici

O bară sandvici se compune din trei straturi, două *fețe* şi un *miez*, lipite între ele cu adeziv. Acestea joacă rolul tălpilor şi al inimii unui profil **I**. În continuare se consideră că fețele sunt identice, deci au aceeaşi grosime şi sunt din acelaşi material.

Miezul, un strat mai gros, cu densitate şi rezistență mecanică mică, are rolul de a menține la distanță fețele, mai subțiri şi mai rigide, cu densitate şi rezistență mecanică mai mare. Fețele conferă ansamblului rezistența la încovoiere, la fel ca tălpile unui profil **I,** putând prelua şi sarcini longitudinale. Miezul conferă un suport continuu pentru fețe, preluând tensiunile de forfecare, şi prevenind cutarea sau flambajul fețelor, precum şi identarea în cazul apăsărilor laterale. Adezivul utilizat pentru lipire trebuie să reziste tensiunilor de întindere şi forfecare care apar la interfața între miez şi fețele laterale.

În general, se urmăreşte realizarea unui raport rezistență/greutate cât mai mare. Fețele pot fi benzi din oțel, aluminiu, melamină sau stratificate armate cu fibre. Miezul poate fi confecționat din polistiren, spumă poliuretanică, din tablă ondulată, celule de tip fagure, sau din lemn de balsa.

În figura 8.29 se compară trei secțiuni având aceleaşi fețe.

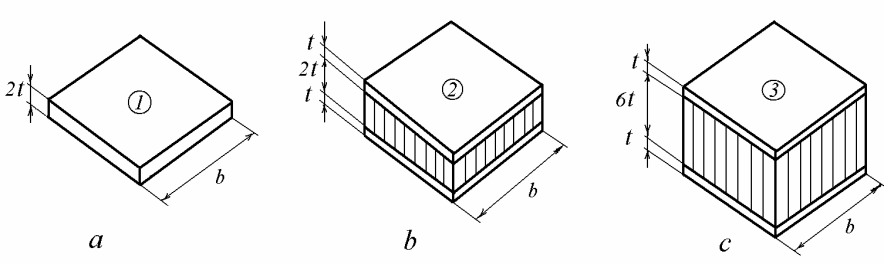


Fig. 8.29

Bara din fig. 8.29, *a*, cu secțiune omogenă, nu are miez, fețele lipite între ele având grosimea cumulată egală cu $2t$. Greutatea, momentul de inerție axial şi modulul de rezistență axial sunt

$$G_1\,,\; I_1 = b(2t)^3/12\,,\; W_1 = b(2t)^2/6\,.$$

Bara din fig. 8.29, *b*, are înălțimea totală $4t$, cu un miez uşor de grosime $2t$ şi fețe de grosime t fiecare. Mărimile calculate mai sus au valorile

$$G_2 = 1{,}06\,G_1,\ I_2 = 9bt^3/2 = 6{,}75\,I_1,\ W_2 = 9bt^2/4 = 3{,}375\,W_1.$$

Bara din fig. 8.29, *c*, are înălțimea totală $8t$, cu un miez uşor de grosime $6t$ şi fețe de grosime t. Mărimile calculate mai sus au valorile

$$G_3 = 1{,}09\,G_1,\ I_3 = 49bt^3/2 = 36{,}75\,I_1,\ W_3 = 49bt^2/8 = 9{,}18\,W_1.$$

La structura sandvici *3* rigiditatea a crescut de 37 ori iar rezistența la încovoiere a crescut de 9 ori față de banda *1*, cu o creştere estimată de numai 1% a greutății.

În continuare se fac următoarele notații (fig. 8.30): t - grosimea fețelor, c - grosimea miezului, b - lățimea barei, ℓ - lungimea barei, $d = c + t$ distanța între centrele fețelor, E_c, E_f - modulele de elasticitate longitudinale ale miezului, respectiv fețelor, G_c, G_f - modulele de elasticitate transversale ale miezului, respectiv fețelor, I – moment de inerție axial.

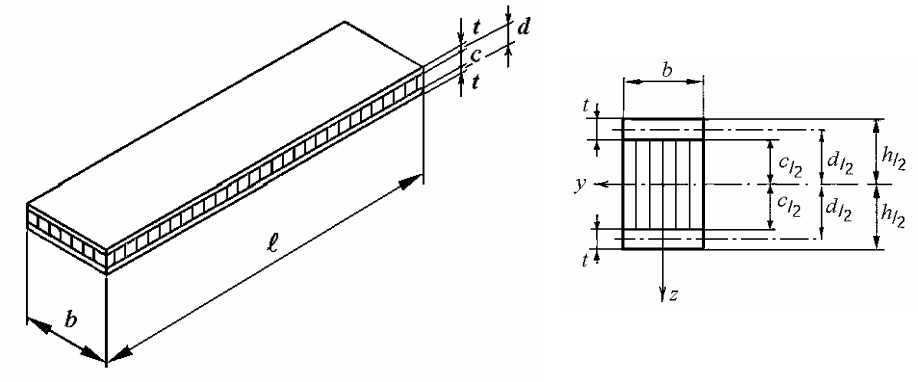


Fig. 8.30

Rigiditatea la încovoiere

La o bară sandvici, rigiditatea la încovoiere este egală cu suma rigidităților fețelor şi miezului

$$(EI)_{ech} = 2\left(\frac{bt^3}{12} + bt\frac{d^2}{4}\right)E_f + \frac{bc^3}{12}E_c, \qquad (8.85)$$

unde termenul al doilea are contribuția predominantă.

Dacă $d/t > 5{,}77$, atunci primul termen reprezintă sub 1% din termenul al doilea şi poate fi neglijat. Dacă

$$\frac{E_f}{E_c}\frac{td^2}{c^3} > 16{,}7 \tag{8.86}$$

atunci contribuția miezului este neglijabilă şi termenul al treilea din expresia rigidității (8.85) poate fi neglijat.

Atunci când condițiile de mai sus sunt îndeplinite, se poate considera

$$(EI)_{ech} \cong \frac{bt(c+t)^2}{2} E_f , \tag{8.87}$$

Rigiditatea la forfecare

Rigiditatea la forfecare este

$$(GA)_{ech} = \frac{bd^2}{c} G_c \cong b\,c\,G_c , \tag{8.88}$$

Tensiunile normale

Tensiunile normale produse de încovoiere (8.75) sunt

$$\sigma_f = \frac{M\,z}{(EI)_{ech}} E_f , \qquad \left(\frac{c}{2} \le |z| \le \frac{h}{2}\right) \tag{8.89, a}$$

$$\sigma_c = \frac{M\,z}{(EI)_{ech}} E_c . \qquad \left(-\frac{c}{2} \le z \le \frac{c}{2}\right) \tag{8.89, b}$$

Rezultă tensiunile maxime în fețe şi miez

$$\sigma_{f_{max}} = \frac{M}{btc}\frac{h}{c} E_f , \qquad \sigma_{c_{max}} = \frac{M}{btc}\frac{E_c}{E_f} , \tag{8.90}$$

al căror raport este (apreciat numeric pentru structuri sandvici uzuale)

$$\frac{\sigma_{f_{max}}}{\sigma_{c\,max}} = \frac{E_f}{E_c}\frac{h}{c} \cong 2000 . \tag{8.91}$$

Tensiunile tangențiale

Tensiunile tangențiale se calculează cu o formulă de tip Juravski (8.37) modificată

$$\tau = \frac{T \cdot \sum\left(S_y^* E\right)}{b \cdot (EI)_{ech}} . \tag{8.92}$$

La distanța *z* în miez

$$\sum\left(S_y^* E\right)= E_f \frac{btd}{2} + E_c \frac{b}{2}\left(\frac{c^2}{4} - z^2\right),$$

deci

$$\tau = \frac{T}{(EI)_{ech}}\left[E_f \frac{td}{2} + \frac{E_c}{2}\left(\frac{c^2}{4} - z^2\right)\right]. \tag{8.93}$$

Tensiunea tangențială maximă în miez, pentru $z = 0$, este

$$\tau_{max} = \frac{T}{(EI)_{ech}} E_f \frac{td}{2}\left(1 + \frac{E_c}{4E_f}\frac{c^2}{td}\right). \tag{8.94}$$

Dacă

$$\frac{E_f}{E_c}\frac{4t}{c}\frac{d}{c} > 100, \tag{8.95}$$

atunci al doilea termen din (8.94) este sub 1% din primul, care reprezintă τ_{min} în miez, la $z = \pm c/2$. În acest caz, tensiunile tangențiale pot fi considerate constante pe grosimea miezului. Deoarece $d \approx c$, condiția (8.95) este similară cu (8.86) care conduce la neglijarea contribuției miezului la rigiditatea la încovoiere a barei.

Rezultă că pentru un miez "moale", în formula tensiunilor tangențiale se poate considera $E_c = 0$ deci

$$\tau = \frac{T}{E_f \dfrac{btd^2}{2}} E_f \frac{td}{2} = \frac{T}{bd} \cong \frac{T}{A_c}. \tag{8.96}$$

Deformații la încovoiere produse de sarcini simetrice

La bare sandvici se limitează săgeata maximă produsă de sarcini transversale. O condiție uzuală este $w_{max} < \dfrac{1}{360}\ell$.

Săgeata totală are două componente, una produsă de încovoiere, cealaltă produsă de forfecare. Expresia generală are forma

$$w = w_1 + w_2 = K_1 \frac{F\ell^3}{(EI)_{ech}} + K_2 \frac{F\ell}{(GA)_{ech}} \tag{8.97}$$

unde K_1 şi K_2 sunt funcții de *x* şi depind de condițiile de rezemare ale barei.

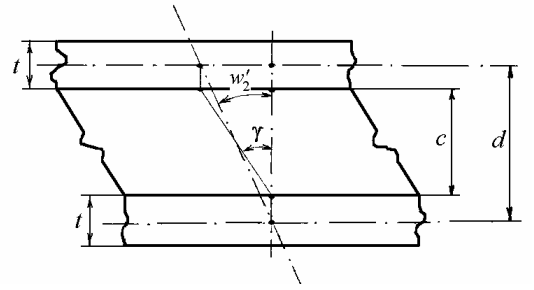


Fig. 8.31

Pentru calculul componentei w_2 se admite că tensiunile tangențiale în miez sunt constante pe grosime (8.96). Rezultă o lunecare specifică cu distribuție constantă pe grosimea miezului $\gamma = T/Gbd$. Dacă centrele fețelor se deplasează numai vertical, atunci $\gamma c = w_2' d$, primul produs fiind măsurat la marginea miezului, iar al doilea - pe mijlocul feței (fig. 8.31). Rezultă

$$w_2' = \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = \gamma \frac{c}{d} = \frac{T}{AG}\frac{c}{d} \approx \frac{T}{AG},$$

de unde se obține prin integrare

$$w_2 = \int \frac{T}{AG}dx + const. = \frac{M}{AG} + const. \qquad (8.98)$$

De exemplu, la o bară simplu rezemată, încărcată cu sarcină uniform distribuită (fig. 8.20)

$$M(x) = \frac{q\ell x}{2} - \frac{qx^2}{2}, \qquad w_2(x) = \frac{q}{2GA}\left(\ell x - x^2\right).$$

La mijlocul deschiderii $w_{2_{max}} = \frac{q\ell^2}{8AG}$, deci săgeata maximă totală a barei sandvici este

$$w_{max} = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{(EI)_{ech}} + \frac{1}{8}\frac{q\ell^2}{(GA)_{ech}}. \qquad (8.99)$$

8.7 Centrul de forfecare

La barele cu pereți subțiri solicitate prin forțe perpendiculare pe axa barei, în secțiunea transversală acționează, în afara tensiunilor normale produse de încovoiere, tensiuni tangențiale. În general, tensiunile tangențiale pot proveni din forfecare şi din răsucire. Pentru separarea acestora se calculează *centrul de*

forfecare, a cărui poziție este funcție numai de geometria secțiunii. Dacă forța transversală din secțiune trece prin centrul de forfecare, atunci se elimină răsucirea. Deci calculul momentului de răsucire se poate face numai după determinarea centrului de forfecare.

Privită din punct de vedere al încovoierii, problema se pune şi altfel. La secțiuni nesimetrice, chiar dacă planul forțelor transversale trece prin axa barei, în afară de încovoiere se produce şi răsucire. Pentru a produce numai încovoiere, forța transversală din secțiune trebuie să treacă prin centrul de forfecare, numit şi *centrul de încovoiere*.

Datorită dualității tensiunilor tangențiale, acestea trebuie să fie orientate paralel cu linia mediană a profilului. Rezultă că, în porțiunile profilului care nu sunt paralele cu forța transversală exterioară, acționează tensiuni tangențiale care nu au direcția forței tăietoare, dar a căror mărime este totuşi proporțională cu aceasta. Forțele tăietoare care rezultă din însumarea acestor tensiuni tangențiale se pot reduce la un cuplu diferit de zero care produce răsucirea profilului.

În cazul profilelor subțiri deschise se aplică *ipoteza lui Juravski modificată,* conform căreia *pe o fâşie subțire din planul secțiunii transversale, perpendiculară pe linia mediană a profilului, tensiunile tangențiale provenind din forfecare sunt constante şi orientate în direcția liniei mediane*. Aşa cum s-a arătat în capitolul 6, tensiunile tangențiale produse de răsucirea liberă variază liniar pe grosimea peretelui, fiind nule pe linia mediană.

Pe baza ipotezei modificate a lui Juravski se calculează tensiunile tangențiale provenind din forfecare. Se calculează apoi rezultanta acestora şi, față de poziția punctului de aplicație al acesteia, se calculează momentul de răsucire cu ajutorul căruia se determină în continuare tensiunile tangențiale produse de răsucire.

În cazul profilului **U** din figura 8.32, *a*, tensiunile tangențiale din tălpi produc forțe tăietoare orizontale egale şi de sensuri contrare. Acestea formează un cuplu față de axa *Ox*, care tinde să producă răsucirea. Aceasta este evitată dacă forța verticală *F* este aplicată în punctul *C*, centrul de forfecare al secțiunii, producând un cuplu egal şi de sens contrar cu cel al forțelor orizontale (fig. 8.32,*b*).

Formula lui Juravski (8.37) se scrie

$$\tau = \frac{T_z \, S_y^*}{\delta \, I_y} \tag{8.100}$$

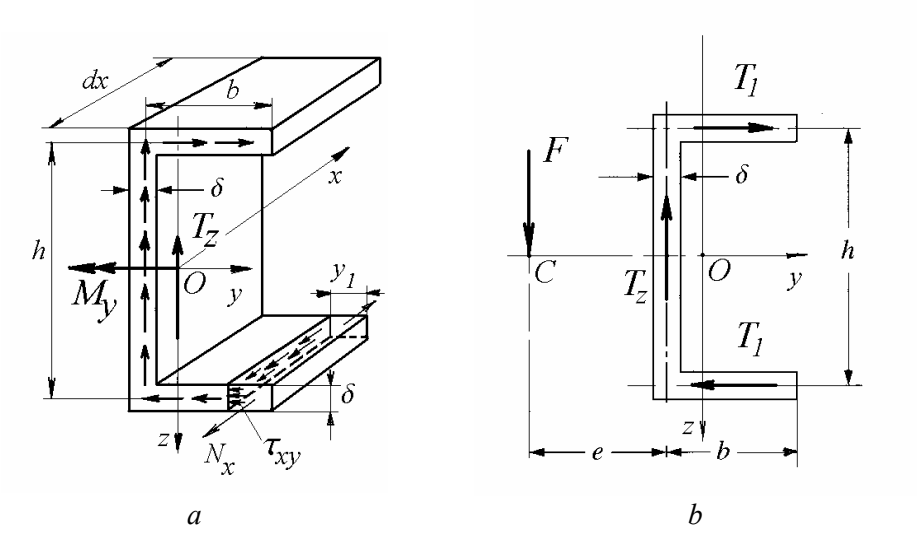
unde δ este grosimea profilului în zona unde se calculează tensiunile de forfecare, iar S_y^* este momentul static, față de axa centrală principală *Oy*, al porțiunii secțiunii transversale situate până la fâşia considerată.

La profilul din figura 8.32, *a*, tensiunile tangențiale în talpa inferioară au expresia

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_y^*}{\delta I_y} = \frac{T_z}{\delta I_y} \delta y \frac{h}{2}, \tag{8.101}$$

deci variază liniar, fiind nule la marginea profilului şi maxime la inimă

$$\tau_{xy_{max}} = \frac{T_z \delta h}{2 I_y}. \tag{8.102}$$



a *b*

Fig. 8.32

Forța tăietoare orizontală dintr-o talpă este

$$T_1 = \frac{\tau_{xy_{max}} \delta b}{2} = \frac{T_z \delta h b^2}{4 I_y}. \tag{8.103}$$

Cuplul forțelor orizontale este echilibrat de momentul forței transversale $F = T_z$ aplicate în centrul de forfecare, la distanța *e* de mijlocul inimii

$$T_1 h = F e.$$

Rezultă poziția centrului de forfecare

$$e = \frac{T_1 h}{T_z} = \frac{\delta h^2 b^2}{4 I_y}. \tag{8.104}$$

Înlocuind $I_y \cong \frac{\delta h^3}{12} + 2\delta h \frac{h^2}{4}$, se obține

$$e = \frac{3b^2}{h + 6b}, \tag{8.105}$$

expresie independentă de grosimea profilului.

8.8 Tensiuni în bare curbe

Dacă înălțimea barei *h* este mică în raport cu raza *R* (bare cu rază mare de curbură, $h/R < 1/5$) atunci se pot aplica relațiile de calcul stabilite pentru bare drepte. La bare cu rază mică de curbură ($h/R > 1/5$) se aplică o teorie aproximativă, bazată pe ipoteza secțiunilor plane, care neglijează tensiunile radiale.

În continuare, se fac următoarele ipoteze: a) barele sunt plane şi au secțiune constantă, simetrică față de planul barei; b) momentul încovoietor este constant în lungul barei, având vectorul dirijat perpendicular pe planul de simetrie al barei; c) secțiunile transversale plane, înainte de încovoierea barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; d) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni radiale; e) distanța transversală între fibrele longitudinale nu se modifică; f) modulul de elasticitate longitudinal este constant în lungul barei şi are aceeaşi valoare la întindere şi la compresiune (E. Winkler, 1858).

Fie un element de bară curbă (fig. 8.33, *a*), delimitat de două secțiuni plane (între care există unghiul $\mathrm{d}\varphi$) şi solicitat la încovoiere pură prin momentul *M* considerat pozitiv când măreşte curbura barei. Se notează (fig. 8.33, *b*): *R* - raza centrului de greutate *G*, R_1 - raza interioară, R_2 - raza exterioară, *r* - raza fibrei neutre, *e* - excentricitatea axei neutre Oy, *z* - distanța de la axa neutră Oy la o fibră oarecare, d_1 - distanța de la axa neutră la fibra interioară, d_2 - distanța de la axa neutră la fibra exterioară, *A* - aria suprafeței secțiunii transversale. Pentru claritatea figurii, distanța *e* este amplificată.

Geometria deformației

Se notează r raza de curbură inițială a stratului neutru. Aceasta diferă de raza de curbură *R* axei barei (linia centrelor de greutate ale secțiunii transversale), fiind totdeauna mai mică $(r < R)$. Linia neutră este deplasată în raport cu centrul de greutate, spre centrul de curbură. Ordonatele *z* se măsoară față de linia neutră. Se presupune că în timpul încovoierii distanța *z* nu se modifică.

Presupunând secțiunea din stânga fixă, sub acțiunea momentului încovoietor secțiunea din dreapta se roteşte (în raport cu cea din stânga) cu unghiul $\Delta\,\mathrm{d}\varphi$. Raza de curbură a fibrei neutre devine r' $\left(r'<r\right)$. Ca urmare, o fibră oarecare *mn,* de lungime $ds=\left(r+z\right)d\varphi$ se lungeşte cu $\Delta ds=z\,\Delta d\varphi$, deci alungirea specifică a fibrei este

$$\varepsilon_s=\frac{n\,l}{m\,n}=\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{z\,\Delta d\varphi}{\left(r+z\right)d\varphi}. \tag{8.106}$$

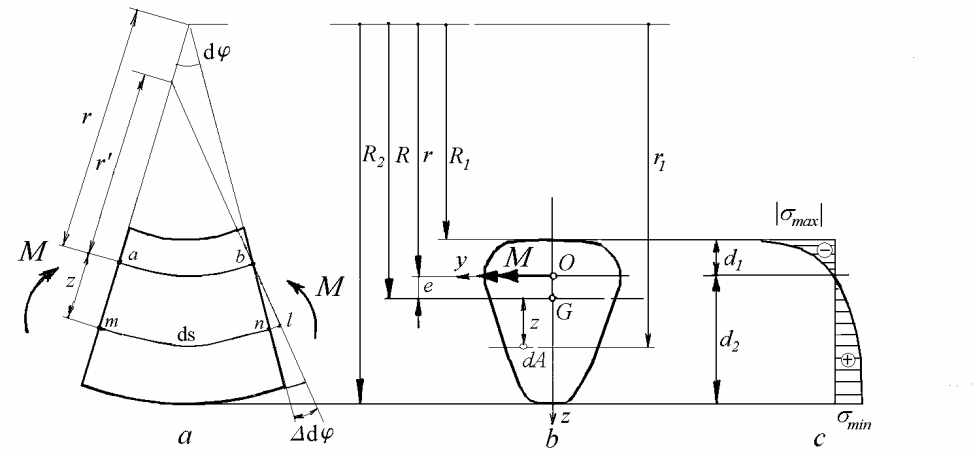


Fig. 8.33

Raportul $\Delta d\varphi/d\varphi$ este proporțional cu variația curburii barei. Arcul *ab* situat în stratul neutru nu-şi modifică lungimea

$$ab=r'\left(d\varphi+\Delta d\varphi\right)=r\,d\varphi,$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}=r\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)=\frac{\Delta\kappa_y}{\kappa_y},$$

unde $\kappa_y=1/r$.

Relația tensiuni-deformații specifice

Utilizând legea lui Hooke, se obține expresia tensiunilor normale (tangente la fibră)

$$\sigma=E\,\varepsilon_s=\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\frac{z}{r+z}. \tag{8.107}$$

Condiții de echilibru

Deoarece în secțiune nu există forță axială, suma forțelor axiale elementare este nulă

$$\int_A \sigma \, \mathrm{d}A = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int_A \frac{z}{r+z} \mathrm{d}A = 0 ,$$

de unde rezultă

$$\int_A \frac{z}{r+z} \mathrm{d}A = 0 , \tag{8.108}$$

sau, introducând o nouă variabilă $r_1 = r + z$,

$$r = \frac{A}{\int \frac{dA}{r_1}} , \tag{8.108, *a*}$$

relație cu ajutorul căreia se determină poziția axei neutre (*Anexa 5*).

Suma momentelor forțelor axiale elementare față de axa *Oy* echilibrează momentul încovoietor *M*, prin urmare :

$$M = \int_A z \sigma \, \mathrm{d}A = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int_A \frac{z^2}{r+z} \mathrm{d}A ,$$

$$M = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int_A \left(z - \frac{r\,z}{r+z} \right) \mathrm{d}A ,$$

$$M = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \int_A z \, \mathrm{d}A - \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} r \int_A \frac{z}{r+z} \mathrm{d}A = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} A\, z_G ,$$

$$M = \frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} A\, e .$$

Înlocuind $\frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M}{A\,e}$ în relația (8.107), se obține expresia tensiunilor normale produse de încovoierea pură

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{A\,e} \; \frac{z}{r+z}} \tag{8.109}$$

Rezultă că la bare curbe distribuția tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii este hiperbolică (fig. 8.33, *c*).

În fibrele extreme tensiunile au valorile

$$|\sigma_{max}| = \frac{M}{A\,e}\,\frac{d_1}{R_1}, \qquad \sigma_{min} = \frac{M}{A\,e}\,\frac{d_2}{R_2} \tag{8.110}$$

Rezolvând integrala (8.108) se determină valoarea razei *r* care defineşte poziția axei neutre față de care s-au calculat ordonatele. În general se calculează excentricitatea

$$e = R - r \cong \frac{I_G}{A\,R}, \tag{8.111}$$

unde I_G este momentul de inerție al secțiunii față de axa care trece prin centrul de greutate, paralelă cu axa neutră.

La secțiunea dreptunghiulară $b \times h$

$$e \cong \frac{h^2}{12\,R}. \tag{8.112}$$

La secțiunea circulară de diametru *d*, raza fibrei neutre este (v. *Anexa 5*)

$$r = \frac{1}{4}\left(2R + \sqrt{4R^2 - d^2}\right). \tag{8.113}$$

În cazul când se consideră acțiunea simultană a forței axiale, tensiunea maximă se calculează cu formula (v. Cap. 11)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\,e}\,\frac{d_1}{R_1}. \tag{8.114}$$

În general, la elementele curbe solicitarea maximă apare în porțiunea situată spre centrul de curbură.

Exemplul 8.13

Să se determine forța maximă *F* cu care se poate încărca bara semicirculară de la *Exemplul 2.4* (fig. 2.22), dacă $R = 0{,}4$ m, iar bara este din oțel cu $\sigma_a = 100$ MPa, având: a) secțiune pătrată, cu latura $a = 80$ mm; b) secțiune circulară, cu diametrul $d = 80$ mm.

Rezolvare

Forța maximă *F* se determină din condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$. Tensiunea maximă se calculează cu formula (8.114) unde $N = N_{max} = 1{,}118\,F$ şi $M = M_{max} = 0{,}618\,F\,R$ (în secțiunea periculoasă, la $\varphi = 63^0 30'$).

a) Dacă bara are secțiunea pătrată cu latura $a = 80$ mm, condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$ devine

$$\frac{1{,}118\,F}{a^2}+\frac{0{,}618\,F\,R}{a^2\,e}\,\frac{d_1}{R_1}=\sigma_a\,,$$

unde

$$e=R-r\cong\frac{I_G}{A\,R}=\frac{a^4}{12\,a^2R}=\frac{80^2}{12\cdot400}=1{,}33\text{ mm}\,,$$

$$R_1=R-\frac{a}{2}=400-40=360\text{ mm}\,,\qquad d_1=\frac{a}{2}-e=40-1{,}33=38{,}67\text{ mm}\,.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\frac{1{,}118\,F}{80^2}+\frac{0{,}618\cdot400\cdot F}{80^2\cdot1{,}33}\,\frac{38{,}67}{360}=100\,,$$

de unde se obține $F=30{,}35\text{ kN}$.

b) Dacă bara are secțiunea circulară, cu diametrul $d=80\text{ mm}$, condiția $\sigma_{max}=\sigma_a$ se scrie

$$\frac{4\cdot1{,}118\,F}{\pi\,d^2}+\frac{4\cdot0{,}618\,F\,R}{\pi\,d^2\,e}\,\frac{d_1}{R_1}=\sigma_a\,,$$

unde

$$e=R-\frac{d^2}{4\left(2R-\sqrt{4R^2-d^2}\right)}=400-\frac{80^2}{4\left(2\cdot400-\sqrt{4\cdot400^2-80^2}\right)}=1{,}01\text{ mm}$$

$$R_1=R-\frac{d}{2}=400-40=360\text{ mm}\,,\qquad d_1=\frac{d}{2}-e=40-1{,}01=38{,}9\text{ mm}\,.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\frac{4\cdot1{,}118\,F}{\pi\cdot80^2}+\frac{4\cdot0{,}618\cdot400\cdot F}{\pi\cdot80^2\cdot1{,}01}\,\frac{38{,}99}{360}=100\,,$$

de unde se obține $F=18{,}19\text{ kN}$.

Exemplul 8.14

Se cere să se calculeze tensiunile de încovoiere în fibrele extreme ale secțiunii *BB* a cârligului de macara din figura 8.E14, solicitat de forța *F*. Secțiunea reală cu colțurile rotunjite se aproximează cu un trapez isoscel.

Rezolvare

Cu notațiile din *Anexa 5*, dimensiunile secțiunii trapezoidale sunt

$$b_1=a\,,\ b_2=0{,}55a\,,\ h=1{,}5a\,.$$

Distanța de la centrul de greutate la fibra interioară este dată de

$$e_1 = \frac{h}{3}\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1{,}5\,a}{3}\frac{a + 1{,}1\,a}{a + 0{,}55\,a} = 0{,}677\,a\,,$$

deci raza de curbură a centrului de greutate este

$$R = R_1 + e_1 = (0{,}9 + 0{,}677)\,a = 1{,}577\,a\,.$$

Aria secțiunii transversale trapezoidale este $A = 1{,}1625\,a^2$.

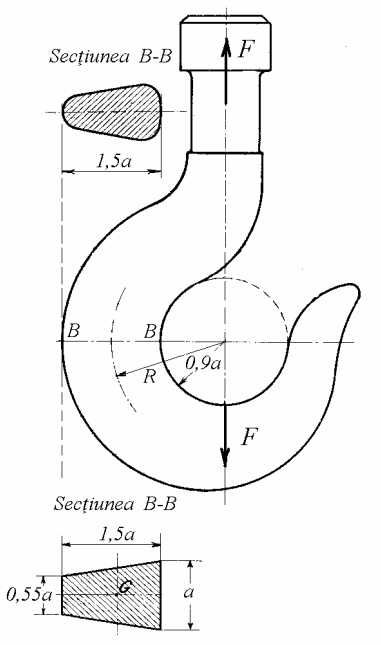


Fig. 8.E14

Se calculează raza de curbură a suprafeței neutre (v. *Anexa 5*)

$$r = \frac{A}{\dfrac{b_1R_2 - b_2R_1}{h}\ln\dfrac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)} = \frac{1{,}1625\,a^2}{\dfrac{a\cdot 2{,}4\,a - 0{,}55\,a\cdot 0{,}9\,a}{1{,}5\,a}\ln\dfrac{2{,}4}{0{,}9} - 0{,}45a} = 1{,}461\,a\,.$$

Excentricitatea acesteia este $e = R - r = 0{,}116\,a$ iar distanțele la fibrele extreme sunt $d_1 = r - R_1 = 0{,}561\,a$ şi $d_2 = R_2 - r = 0{,}939\,a$.

Tensiunile produse de încovoiere în fibrele extreme ale secțiunii *BB* sunt

$$|\sigma_{max}| = \frac{F\,R}{A\,e}\frac{d_1}{R_1} = 7{,}28\frac{F}{a^2}\,, \qquad \sigma_{min} = \frac{F\,R}{A\,e}\frac{d_2}{R_2} = 4{,}57\frac{F}{a^2}\,.$$

9.
STĂRI DE TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII SPECIFICE

Într-un punct dintr-un corp elastic, starea de tensiuni se poate defini prin tensiunile care acționează pe trei suprafețe (definite în trei plane) perpendiculare între ele, care trec prin punctul considerat. Pe fiecare suprafață acționează o tensiune normală şi o tensiune tangențială, reprezentată prin cele două componente paralele cu muchiile comune. Datorită dualității tensiunilor tangențiale, acestea sunt egale două câte două, deci starea de tensiuni dintr-un punct este definită de şase tensiuni, trei normale şi trei tangențiale.

Întrucât tensiunea într-un punct depinde de orientarea suprafeței pe care acționează, se studiază variația tensiunilor cu rotirea în spațiu a suprafeței.

Este posibil să se aleagă cele trei suprafețe perpendiculare între ele astfel încât pe acestea să nu acționeze tensiuni tangențiale. Tensiunile normale pe aceste suprafețe au valori extreme, una dintre ele fiind tensiunea normală maximă. Determinarea tensiunii maxime şi a orientării supafeței pe care acționează sunt probleme de primă importanță în proiectare. Pe fețele unui octaedru, egal înclinate față de direcțiile principale, acționează tensiuni normale şi tensiuni tangențiale octaedrice. Acestea din urmă sunt utilizate la stabilirea unei condiții de rezistență.

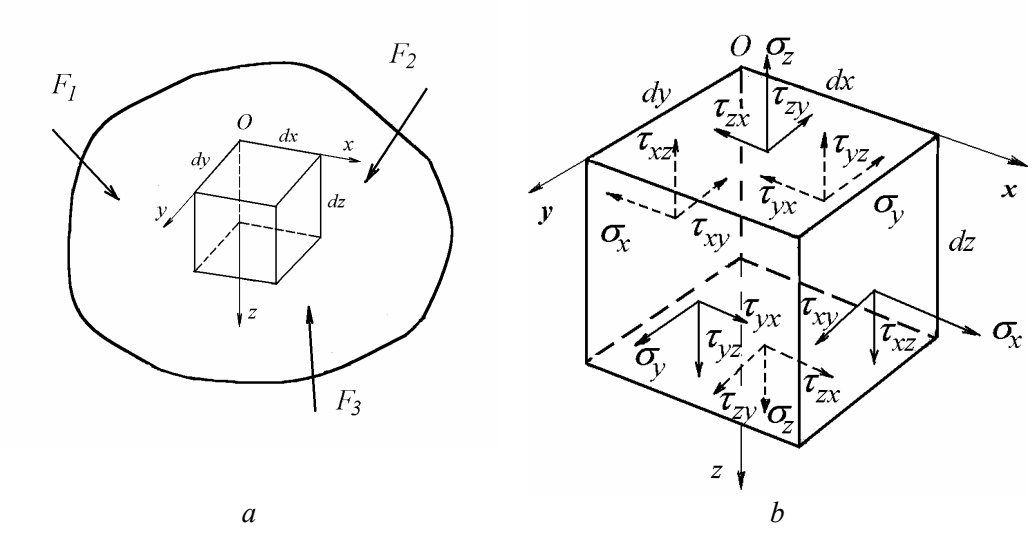
Prin punctul considerat se pot alege alte trei suprafețe perpendiculare între ele, pe care tensiunile tangențiale au valori extreme. Aceste suprafețe sunt înclinate la 45^0 față de cele pe care tensiunile normale au valori extreme.

Starea de deformații specifice într-un punct se defineşte prin trei alungiri specifice şi trei lunecări specifice, fiind dependentă de orientarea în spațiu. În practică, tensiunile nu pot fi determinate direct. Ele se calculează pe baza deformațiilor specifice fie calculate, fie măsurate, de exemplu cu traductoare tensometrice rezistive. Cunoscând alungirile specifice pe trei direcții arbitrare, se calculează alungirile specifice principale, cu care se calculează tensiunile normale principale, pe baza legii lui Hooke.

Un caz aparte îl constituie materialele compozite, care sunt anizotrope. La calculul compozitelor stratificate, în care fibrele din fiecare lamină au orientări diferite, se utilizează relațiile de calcul al tensiunilor şi alungirilor specifice față de axe rotite.

9.1 Starea tridimensională de tensiuni

Se consideră un corp elastic în echilibru static sub acțiunea forțelor exterioare F_1, F_2, F_3 (fig. 9.1, *a*). Dacă din interiorul corpului se detaşează un paralelipiped elementar de laturi d*x*, d*y*, d*z*, pe fiecare față a acestui element de volum va acționa o tensiune care poate fi descompusă în trei componente paralele cu axele *Oxyz* - o tensiune normală şi două tensiuni tangențiale (fig. 9.1, *b*).



a *b*

Fig. 9.1

Starea tridimensională de tensiuni se caracterizează prin trei tensiuni normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ şi şase tensiuni tangențiale, egale două câte două $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, conform (3.3). Convențiile de semne sunt prezentate în paragraful 3.2. În continuare se neglijează forțele distribuite în volum.

9.1.1 Starea de tensiuni în jurul unui punct

Dacă se cunosc tensiunile într-un punct al unui corp, pe trei suprafețe perpendiculare între ele, se pot determina tensiunile pe orice suprafață orientată diferit față de acestea care trece prin punctul respectiv.

Pentru aceasta, în jurul punctului se izolează un tetraedru (fig. 9.2, *a*) a cărui față înclinată *BCD* este orientată prin versorul normalei $\bar{n}(l, m, n)$, unde $l = \cos(\bar{n}, \bar{i})$, $m = \cos(\bar{n}, \bar{j})$, $n = \cos(\bar{n}, \bar{k})$ sunt cosinuşii directori ai normalei, iar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Se presupune că se cunosc tensiunile normale şi tensiunile tangenţiale pe cele trei feţe ale tetraedrului din planele de coordonate şi se cere determinarea tensiunii rezultante $\overline{p}$, de componente p_x, p_y, p_z, care acţionează pe faţa *BCD*.

Se scrie echilibrul forţelor care acţionează asupra tetraedrului *OBCD*. Dacă dA este aria suprafeţei *BCD*, atunci ariile suprafeţelor *OCD*, *ODB* şi *OBC* au expresiile

$$dA_x = l\,dA\,, \qquad dA_y = m\,dA\,, \qquad dA_z = n\,dA\,. \tag{9.1}$$

Ecuaţia de proiecţii a forţelor pe axa *Ox* (fig. 9.2, *b*) se scrie

$$p_x\,\mathrm{d}A = \sigma_x\,\mathrm{d}A_x + \tau_{yx}\,\mathrm{d}A_y + \tau_{zx}\,\mathrm{d}A_z\,, \tag{9.2}$$

sau, înlocuind expresiile (9.1) în ecuaţia (9.2),

$$p_x = \sigma_x\,l + \tau_{yx}\,m + \tau_{zx}\,n\,. \tag{9.3, a}$$

Din ecuaţiile de proiecţii pe axele *Oy* şi *Oz* rezultă

$$p_y = \tau_{xy}\,l + \sigma_y\,m + \tau_{zy}\,n\,, \tag{9.3, b}$$

$$p_z = \tau_{xz}\,l + \tau_{yz}\,m + \sigma_z\,n\,. \tag{9.3, c}$$

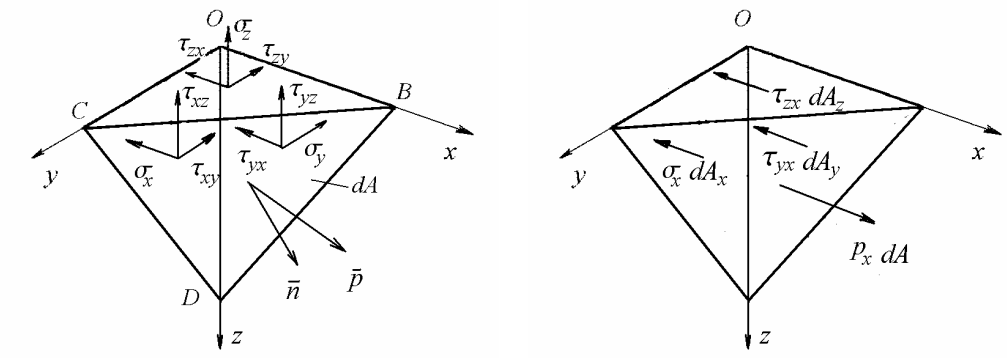


Fig. 9.2

Relaţiile (9.3) definesc tensiunea rezultantă pe suprafaţa dA (A. Cauchy, 1822). La limită, când laturile tetraedrului tind spre zero, suprafaţa dA conţine punctul *O*, deci se poate considera că relaţiile (9.3) dau componentele tensiunilor pe un plan înclinat care trece de fapt prin punctul *O*.

Ecuaţiile de momente conduc la relaţiile de dualitate a tensiunilor tangenţiale (3.3).

Relațiile (9.3) se pot scrie matriceal sub forma

$$\{p\} = [T_\sigma]\{n\}. \tag{9.4}$$

unde matricea tensiunilor

$$\{T_\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

iar $\{p\} = \{\, p_x \quad p_y \quad p_z \,\}^T$ şi $\{n\} = \{\, l \quad m \quad n \,\}^T$.

Se descompune tensiunea $\bar{p}$ în componenta normală σ_n şi cea tangențială τ_n. Tensiunea normală σ_n este egală cu proiecția lui $\bar{p}$ pe direcția versorului $\bar{n}$

$$\sigma_n = \bar{p} \cdot \bar{n} = \{p\}^T \{n\} = p_x\, l + p_y\, m + p_z\, n. \tag{9.5}$$

Din relația (9.4) se obține, prin transpunere,

$$\{p\}^T = \{n\}^T [T_\sigma]^T = \{n\}^T [T_\sigma], \tag{9.6}$$

unde s-a utilizat proprietatea de simetrie a matricei tensiunilor $[T_\sigma]$, rezultat direct al dualității tensiunilor tangențiale.

Înlocuind expresia (9.6) în relația (9.5) se obține tensiunea normală

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^T [T_\sigma] \{n\} = \\ &= \sigma_x\, l^2 + \sigma_y\, m^2 + \sigma_z\, n^2 + 2\,\tau_{xy}\, l\, m + 2\,\tau_{yz}\, m\, n + 2\,\tau_{zx}\, n\, l. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Tensiunea tangențială τ_n este egală cu proiecția lui $\bar{p}$ pe planul secțiunii înclinate $\tau_n = |\, \bar{p} \times \bar{n} \,|$.

Dar produsului vectorial

$$\begin{aligned} \bar{p} \times \bar{n} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ l & m & n \end{vmatrix} = \\ &= (p_y\, n - p_z\, m)\,\bar{i} + (p_z\, l - p_x\, n)\,\bar{j} + (p_x\, m - p_y\, l)\,\bar{k}, \end{aligned}$$

deci valoarea absolută a tensiunii tangențiale este

$$\tau_n = \left[(p_y\, n - p_z\, m)^2 + (p_z\, l - p_x\, n)^2 + (p_x\, m - p_y\, l)^2 \right]^{1/2}. \tag{9.8}$$

Dacă orientarea planului *BCD* se schimbă, atunci valorile tensiunilor σ_n şi τ_n se modifică.

9.1.2 Tensiuni principale

Într-o analiză de tensiuni, interesează valorile extreme ale lui σ_n şi orientarea suprafeţelor pe care acţionează acestea. Problema de extrem condiţionat are constrângerea geometrică

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 . \tag{9.9}$$

Se introduce multiplicatorul lui Lagrange λ şi se calculează valorile extreme ale funcţiei

$$F_1 \left(l, m, n \right) = \sigma_n - \lambda \left(l^2 + m^2 + n^2 - 1 \right). \tag{9.10}$$

Condiţiile ca F_1 să aibă valori extreme, $\partial F_1 / \partial l = 0$, $\partial F_1 / \partial m = 0$, $\partial F_1 / \partial n = 0$, conduc la sistemul de ecuaţii algebrice omogene

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_x - \lambda \right) l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = 0 , \\ &\tau_{xy}\, l + \left(\sigma_y - \lambda \right) m + \tau_{zy}\, n = 0 , \\ &\tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \left(\sigma_z - \lambda \right) n = 0 . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Acesta are forma problemei de valori proprii a matricei tensiunilor

$$\left[T_\sigma \right] \left\{ n \right\} = \lambda \left\{ n \right\} . \tag{9.12}$$

Pentru a avea soluţii nebanale, determinantul coeficienţilor necunoscutelor l, m, n, trebuie să se anuleze

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{9.13}$$

Ecuaţia caracteristică (9.13) are forma

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0 \tag{9.14}$$

unde coeficienţii au expresiile

$$\begin{aligned} &J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z , \\ &J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 , \\ &J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x\, \tau_{yz}^2 - \sigma_y\, \tau_{zx}^2 - \sigma_z\, \tau_{xy}^2 + 2\, \tau_{xy}\, \tau_{yz}\, \tau_{zx} = \det \left[T_\sigma \right] . \end{aligned} \tag{9.15}$$

Soluțiile ecuației (9.14) se numesc *tensiuni normale principale* şi se notează $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ordonate descrescător. Ele sunt valorile proprii ale matricei tensiunilor $[T_\sigma]$. Lor le corespund *direcțiile principale*,

$$\{n_i\} = \{ l_i \quad m_i \quad n_i \}^T, \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (9.16)$$

soluțiile ecuațiilor (9.12) în care s-a înlocuit $\lambda = \sigma_i$

$$[T_\sigma]\{n_i\} = \sigma_i \{n_i\}, \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (9.17)$$

şi care reprezintă vectorii proprii ai matricei $[T_\sigma]$.

Direcțiile principale ale tensiunilor normale definesc orientarea normalelor la suprafețele pe care tensiunile normale au valori extreme. Pe aceste suprafețe nu acționează tensiuni tangențiale.

Într-adevăr, dacă $\tau_n = 0$, atunci $\overline{p} = \lambda \overline{n}$, $p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \lambda l$, deci

$$\{p\} = \lambda \{n\} \qquad (9.18)$$

Înlocuind expresia (9.17) în relația (9.4) rezultă ecuația (9.12).

Direcțiile principale sunt perpendiculare între ele, ceea ce se demonstrează pe baza ortogonalității vectorilor proprii ai matricei tensiunilor. Rezultă că, dacă se izolează dintr-un corp elastic un element de volum paralelipipedic având muchiile paralele cu direcțiile principale ale tensiunilor normale, atunci pe fețele elementului acționează numai tensiuni normale, de valori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

9.1.3 Calculul față de direcțiile principale

Dacă axele de coordonate se aleg în lungul direcțiilor principale ale tensiunilor normale (fig. 9.3, *a*) şi se izolează un tetraedru în jurul originii acestor axe, atunci pe o suprafață înclinată, cu normala definită de cosinuşii directori *l*, *m*, *n*, componentele tensiunii rezultante sunt

$$p_x = \sigma_1 l, \qquad p_y = \sigma_2 m, \qquad p_z = \sigma_3 n. \qquad (9.19)$$

Tensiunea normală pe această suprafață este

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \qquad (9.20)$$

Tensiunea tangențială se calculează din relația

$$\begin{aligned} \tau^2 &= p \cdot p - \sigma^2 = \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \right)^2. \end{aligned} \qquad (9.21, a)$$

După transformări, ținând cont de relația (9.9), se obține

$$\tau = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \right]^{1/2} . \qquad (9.21, b)$$

Din relația (9.21, *b*) rezultă că, atunci când $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, tensiunile tangențiale sunt nule indiferent de orientarea suprafeței.

Înlocuind cosinuşii directori din relațiile (9.19) în (9.9), se obține

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \qquad (9.22)$$

Ecuația (9.22) defineşte *elipsoidul tensiunilor*, ale cărui semiaxe sunt tensiunile principale. Această înterpretare geometrică atestă faptul că tensiunile principale sunt valorile extreme ale tensiunilor normale.

Matricea tensiunilor este în acest caz

$$\{ T_\sigma \} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix},$$

iar ecuația (9.14) devine

$$(\sigma_1 - \lambda)(\sigma_2 - \lambda)(\sigma_3 - \lambda) = 0, \qquad (9.23)$$

deci

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \qquad (9.24)$$

Mărimile J_1, J_2, J_3 au aceleaşi valori independent de axele de coordonate față de care se defineşte starea de tensiuni. De exemplu

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z .$$

Ca urmare J_1, J_2, J_3 se numesc *invarianți ai tensiunilor*.

9.1.4 Tensiuni tangențiale octaedrale

Un interes aparte îl prezintă tensiunile pe fețele unui octaedru construit față de direcțiile principale (fig. 9.3, *b*). *Planele octaedrale* sunt cele opt fețe ale căror normale fac unghiuri egale cu axele de coordonate. Cosinuşii directori ai fețelor unui octaedru satisfac relațiile

$$l_{oct}^2 = m_{oct}^2 = n_{oct}^2 = \frac{1}{3}, \tag{9.25}$$

deci normalele fac unghiuri de $54{,}73^0$ cu direcțiile principale.

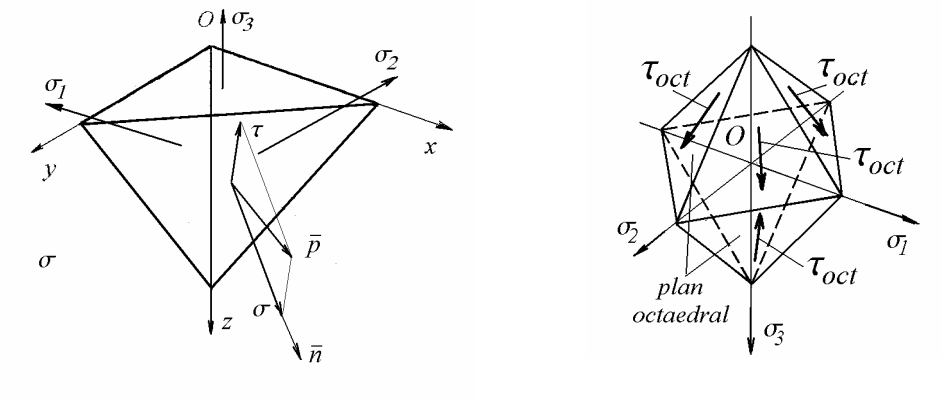
Înlocuind aceste valori în expresia (9.21, *b*) se obține formula tensiunii tangențiale octaedrale

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \tag{9.26, a}$$

Din ecuația (9.20) rezultă *tensiunea normală octaedrală*

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \tag{9.27}$$

care este egală cu *tensiunea medie*.



a *b*

Fig. 9.3

Față de axe de coordonate oarecare, tensiunea tangențială octaedrală are expresia

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2}. \tag{9.26, b}$$

9.1.5 Tensiuni tangențiale extreme

Ca şi în cazul tensiunilor normale, interesează valorile extreme ale tensiunilor tangențiale şi orientarea suprafețelor pe care acestea acționează.

Problema de extrem condiționat se rezolvă prin metoda multiplicatorului lui Lagrange. Se construiește funcția

$$F_2\left(l,m,n\right)=\tau^2-\lambda\left(l^2+m^2+n^2-1\right). \tag{9.28}$$

şi se scriu condiţiile ca F_2 să aibă valori extreme: $\partial F_2/\partial l=0$, $\partial F_2/\partial m=0$, $\partial F_2/\partial n=0$. Se obţine sistemul de ecuaţii algebrice

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 l\,m^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2 l\,n^2-\lambda\,l=0,\\
&\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 m\,n^2+\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 m\,l^2-\lambda\,m=0,\\
&\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2 n\,l^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 n\,m^2-\lambda\,n=0.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Soluţiile nebanale sunt

$$\begin{aligned}
&l=0, && m=n=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2}{2},\\
&m=0, && n=l=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}{2},\\
&n=0, && l=m=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2}{2}.
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Înlocuind aceşti cosinuşi directori pe rând în relaţia (9.21, *b*) se obţin tensiunile tangenţiale extreme

$$\tau_1=\frac{\left|\sigma_2-\sigma_3\right|}{2}, \qquad \tau_2=\frac{\left|\sigma_3-\sigma_1\right|}{2}, \qquad \tau_3=\frac{\left|\sigma_1-\sigma_2\right|}{2}. \tag{9.31}$$

Deoarece $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$, tensiunea tangenţială maximă este $\tau_{max}=\tau_2$.

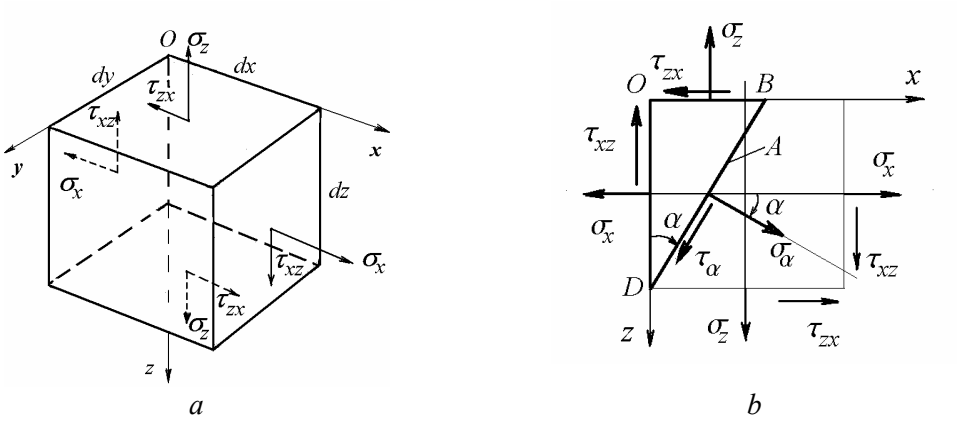
Din valorile cosinuşilor directori (9.30) rezultă că tensiunile tangenţiale au valori extreme pe planele bisectoare ale planelor definite de direcţiile principale ale tensiunilor normale. Desigur, pe aceste plane tensiunile normale nu sunt nule.

9.2 Starea plană de tensiuni

În cazul stării plane de tensiuni, se consideră tensiuni paralele numai cu două dintre axele de coordonate, independente de una din coordonate (fig. 9.4, *a*), deci σ_y, τ_{xy}, τ_{zy} şi forţele volumice pe direcţia *y* se presupun neglijabile sau nule. Exemple sunt stările de tensiuni într-un vas cu pereţi subţiri solicitat la presiune interioară sau într-o placă plană subţire, solicitată de forţe coplanare uniform distribuite pe grosime.

9.2.1 Starea de tensiuni în jurul unui punct

Se consideră un element de volum prismatic cu baza triunghiulară situată în planul *xOz* (fig. 9.4, *b*) şi cu grosimea egală cu unitatea. Se presupun cunoscute tensiunile $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ pe feţele din planele de coordonate şi se cere calculul tensiunilor σ_α şi τ_α pe faţa *BD* înclinată cu unghiul α. De notat că unghiul α este pozitiv în sensul orar, în timp ce rotirile în planul *zOx* sunt pozitive în sens contrar.



a *b*

Fig. 9.4

Se notează cu *A* aria suprafeţei *BD*, deci suprafaţa *OB* are aria $A\sin\alpha$, iar suprafaţa *OD* are aria $A\cos\alpha$.

Se scriu ecuaţiile de proiecţii ale forţelor pe direcţia lui σ_α şi a lui τ_α :

$$\sigma_\alpha \, A - \sigma_x A\cos^2\alpha - \sigma_z A\sin^2\alpha - 2\,\tau_{xz}\, A\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$-\tau_\alpha \, A - \sigma_x A\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_z A\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xz} A\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0.$$

Ecuaţia de echilibru a momentelor faţă de mijlocul feţei *BD* conduce la relaţia (3.3): $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Se obţine

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + 2\,\tau_{xz}\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (9.32, a)$$

$$-\tau_\alpha = \left(\sigma_x - \sigma_z\right)\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xz}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right), \qquad (9.32, b)$$

şi, înlocuind unghiul α cu $\alpha + 90^0$,

$$\sigma_{\alpha+90^o} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_z \cos^2\alpha - 2\,\tau_{xz}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (9.32, c)$$

Relaţiile (9.32) se mai scriu

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xz}\sin 2\alpha\,, \qquad (9.33,\, a)$$

$$-\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xz}\cos 2\alpha\ . \qquad (9.33,\, c)$$

9.2.2 Tensiuni principale

Valorile extreme ale tensiunii normale σ_α se obţin anulând derivata acesteia în raport cu unghiul 2α :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xz}\cos 2\alpha = \tau_\alpha = 0\ . \qquad (9.34)$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}\ , \qquad (9.35)$$

relaţie care defineşte *direcţiile principale* ale tensiunilor normale.

Din relaţia (9.34) se observă că *pe feţele care au ca normale direcţiile principale, tensiunile tangenţiale sunt nule.*

Pentru $0 \le 2\alpha \le 2\pi$, între cele două soluţii $2\alpha_1$ şi $2\alpha_2$ există relaţia $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, deci direcţiile principale sunt perpendiculare între ele.

Înlocuind valorile unghiului α date de relaţia (9.35) în expresia (9.32) se obţin *tensiunile principale*

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}{}^2}\ . \qquad (9.36)$$

Se observă că invarianţii tensiunilor sunt în acest caz

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_z = \text{const.}\,, \qquad (9.37)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = \text{const.} \qquad (9.38)$$

9.2.3 Tensiuni tangenţiale extreme

Valorile extreme ale tensiunii tangenţiale τ_α se obţin din condiţia

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xz}\sin 2\alpha = 0 \qquad (9.39)$$

care se mai scrie

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \ . \qquad (9.40)$$

Rezultă $2\alpha' = 2\alpha_1 \pm \pi/2$, deci $\alpha' = \alpha + \pi/4$, astfel că tensiunile tangențiale extreme apar în secțiuni înclinate cu 45^0 față de direcțiile principale şi au valorile

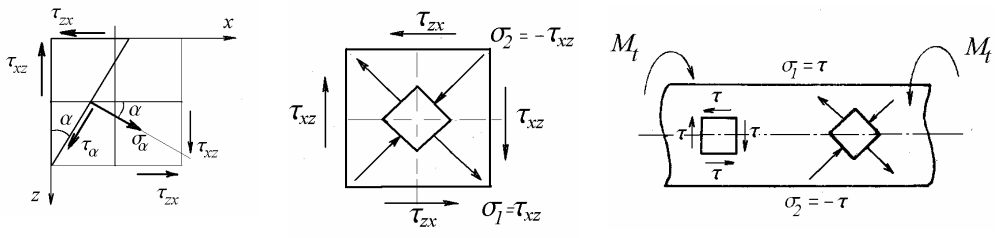
$$\tau_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}{}^2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (9.41)$$

9.2.4 Cazuri particulare ale stării plane de tensiuni

Starea uniaxială de tensiuni este prezentată în paragraful 5.5. Într-o bară solicitată la întindere sau compresiune, apar tensiuni tangențiale maxime în secțiuni înclinate la 45^0 față de axa barei, ceea ce explică orientarea suprafețelor de rupere la unele materiale fragile.

Starea de forfecare pură

Se consideră un element solicitat la forfecare pură, ca în figura 9.5, *a*. Pe fețele elementului acționează numai tensiuni tangențiale.



a *b* *c*

Fig. 9.5

Rezultă că pe o suprafață înclinată cu unghiul α

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \tau_{xz}\sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \tau_{xz}\cos 2\alpha\,. \end{aligned} \qquad (9.42)$$

Deoarece $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, $\alpha_1 = 45^0$. Pe fețele unui element orientate la 45^0 față de primul, acționează numai tensiunile normale $\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xz}$ (fig. 9.5, *b*).

O aplicație a acestui rezultat se întâlneşte la măsurarea tensiunilor tangențiale în arbori solicitați la răsucire (fig. 9.5, *c*). Un element de volum din vecinătatea suprafeței arborelui este solicitat la forfecare pură (v. Cap. 6) dacă laturile sale sunt paralele cu generatoarele, respectiv perpendiculare pe acestea.

Un element rotit cu 45^0 este solicitat de tensiuni normale principale, egale în mărime cu tensiunile tangențiale produse de răsucire pe fețele primului element. Se înlocuieşte măsurarea lui τ cu măsurarea lui σ la 45^0 față de axa barei, ceea ce se realizează uşor cu ajutorul traductoarelor tensometrice rezistive.

Bara solicitată la încovoiere

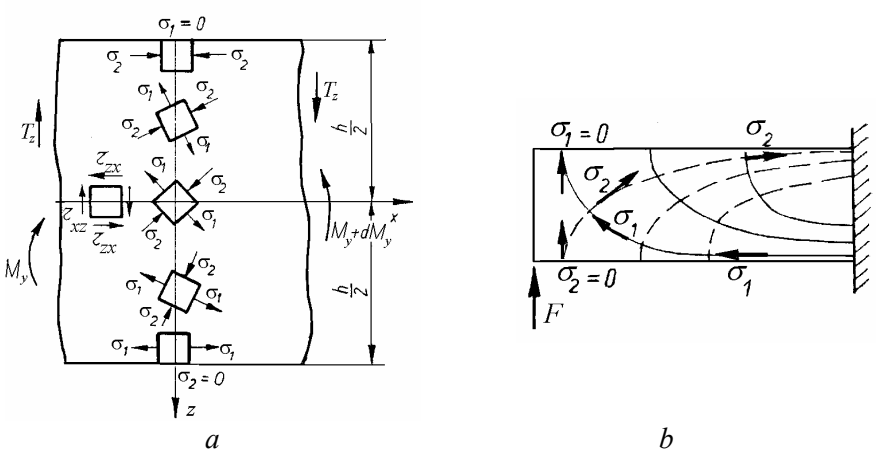
În cazul barelor solicitate la încovoiere (fig. 9.6, *a*), $\sigma_z = 0$, deci relațiile (9.35) şi (9.36) devin

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x} \quad , \tag{9.43}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{{\sigma_x}^2 + 4{\tau_{xz}}^2} \quad , \tag{9.44}$$

unde

$$\sigma_x = \frac{M_y\, z}{I_y}, \qquad \tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y^*}{b\, I_y} = \tau_{xz}(z).$$



a *b*

Fig. 9.6

La $z = 0$, $\sigma_x = 0$, $\alpha_{1,2} = \pm 45^0$, $\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xz}$, deci elementul este solicitat la forfecare pură.

La $z=\pm h/2$, $\tau_{xz}=0$, $\alpha_{1,2}=0^{\circ},90^{\circ}$, $\sigma_{1,2}=0,\sigma_x$, deci direcțiile principale corespund cu direcțiile axelor de coordonate.

Dacă se parcurge secțiunea transversală în lungul axei *Oz*, în sens pozitiv, direcțiile principale se rotesc continuu (fig. 9.6, *a*) în sens contrar acelor de ceas. Determinând în mai multe puncte orientarea direcțiilor principale (fig. 9.6, *b*) se pot trasa *liniile izostatice*, care reprezintă înfășurătoarele tensiunilor normale principale, formând o dublă rețea de curbe ortogonale (K. Culmann, 1866).

La armarea grinzilor din beton se urmăreşte ca armăturile din oțel să fie orientate aproximativ pe direcția liniilor izostatice.

9.2.5 Cercul lui Mohr pentru tensiuni

Relațiile (9.32) şi (9.33) se pot scrie sub forma

$$\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\cos 2\alpha+\tau_{xz}\sin 2\alpha,$$

$$\tau=-\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xz}\cos 2\alpha.$$

Ridicând la pătrat şi adunând ecuațiile se obține

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2. \qquad (9.45)$$

Aceasta este ecuația unui cerc (fig. 9.7), de rază $\left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ şi centru de coordonate $\left[(\sigma_x+\sigma_z)/2,0\right]$, denumit *cercul lui Mohr* (O. Mohr, 1882).

Pe cerc, unghiurile se măsoară în aceeaşi direcție în care se măsoară unghiul α în figura 9.4 (sens orar). Unghiul 2α pe cerc corespunde unui unghi α pe element. Punctele de pe cercul lui Mohr definesc stări de tensiuni pe fețele elementului din figura 9.4.

Punctul *P* are coordonatele σ_x şi τ_{xz}, egale cu tensiunile pe fața *OD*. Punctul diametral opus *Q* defineşte tensiunile pe fața *OB*, perpendiculară pe *OD*, σ_z şi τ_{zx}. Punctele P' şi Q' definesc tensiunile pe fețele rotite cu unghiul α față de axele de coordonate. Punctele P_1 şi Q_1, în care cercul intersectează axa orizontală, au abscise egale cu tensiunile principale σ_1 şi σ_2. Unghiul $2\alpha_1$ al razei *CP* cu axa absciselor corespunde direcției principale α_1, deci înclinării normalei la fața pe care acționează σ_1.

Se observă că ordonata punctului *Q* este negativă. Pentru studiul stării plane de tensiuni cu ajutorul cercului lui Mohr este necesară o *convenţie de semne modificată*, diferită de cea adoptată în Capitolul 3. Tensiunile tangenţiale care tind să producă o rotaţie în sens orar se consideră pozitive, iar cele care tind să producă o rotaţie în sens antiorar se consideră negative (sunt reprezentate de puncte situate sub axa absciselor).

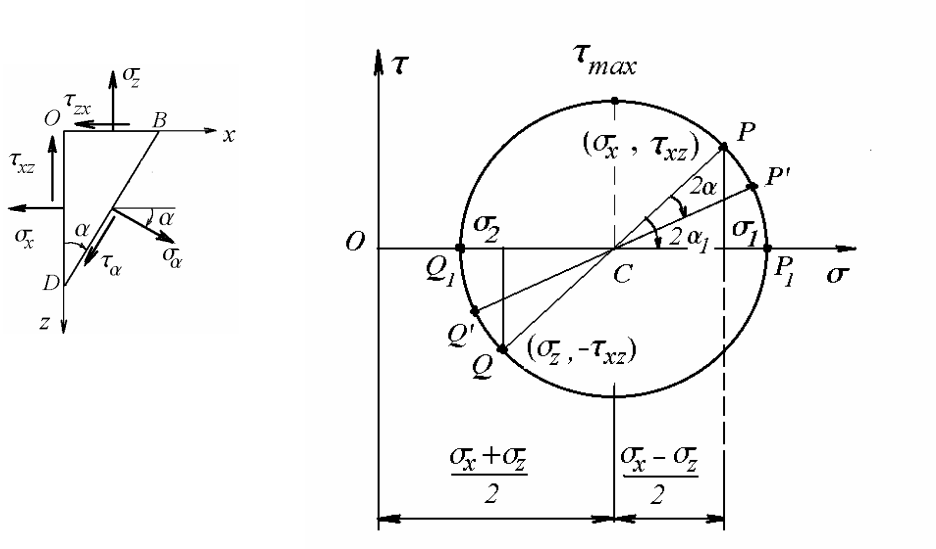


Fig. 9.7

Cercul lui Mohr se construieşte pornind de la tensiunile σ_x, σ_z, τ_{xz} care definesc punctele *P* şi *Q*. Centrul cercului *C* se află la intersecţia diametrului *PQ* cu axa absciselor. Se trasează cercul de rază *CP*, care intersectează axa orizontală în punctele P_1 şi Q_1, de abscise σ_1 şi σ_2.

9.3 Ecuaţiile diferenţiale de echilibru

Fie un element de laturi *dx*, *dy* şi grosime egală cu 1 (fig. 9.8) detaşat dintr-un corp elastic solicitat mecanic. Se presupune că tensiunile σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ şi sarcinile volumice *X*, *Y* sunt funcţii doar de *x* şi *y* (independente de *z*), iar $Z = 0$ (stare plană de tensiuni).

Variaţia tensiunilor cu poziţia se poate exprima printr-o dezvoltare în serie Taylor trunchiată. Dacă pe faţa din stânga acţionează σ_x, atunci pe faţa din dreapta, situată la distanţa d*x*, acţionează $\sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} \mathrm{d}x$.

Ecuația de echilibru a forțelor pe direcția x se scrie

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \sigma_x\,\mathrm{d}y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \tau_{yx}\,\mathrm{d}x + X\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

După simplificări se obține

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0\,. \tag{9.46}$$

Similar, din ecuația de echilibru pe direcția y rezultă

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0\,. \tag{9.47}$$

Ecuațiile diferențiale de echilibru (9.46) şi (9.47) se mai numesc *ecuațiile lui Cauchy*.

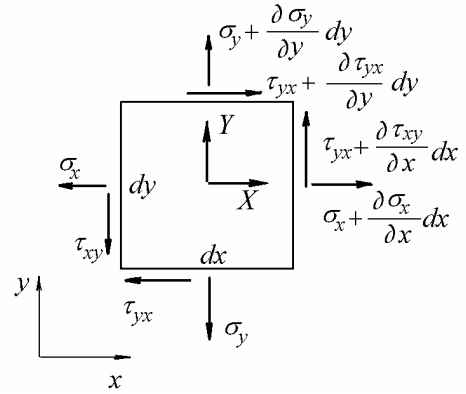


Fig. 9.8

Ecuația de momente față de centrul elementului conduce la relația de dualitate a tensiunilor tangențiale (3.3).

În cazul stării de tensiuni tridimensionale, ecuațiile diferențiale de echilibru (A. Cauchy, 1822) se scriu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\,,
\end{aligned} \tag{9.48}$$

la care se adaugă cele trei relații de dualitate a tensiunilor tangențiale (3.3).

Cele şase ecuații conțin nouă necunoscute, deci problemele de analiză a tensiunilor sunt *static nedeterminate* interior.

În cazul unui element situat în vecinătatea suprafeței unui corp elastic, ecuațiile de echilibru care se stabilesc între forțele de suprafață şi tensiunile interioare reprezintă *condițiile la limită*. Acestea sunt chiar ecuațiile (9.3) care exprimă echilibrul forțelor care acționează asupra tetraedrului din figura 9.2, dacă fața înclinată *BCD* este pe suprafața corpului iar tensiunea rezultantă *p* este o sarcină pe unitatea de suprafață.

9.4 Starea plană de deformații specifice

În continuare, studiul deformațiilor specifice se face în planul *xOy*, considerând că alungirea specifică ε_z şi lunecările specifice γ_{zx}, γ_{zy} sunt nule. Trebuie remarcat că starea plană de deformații specifice este asociată cu un sistem de tensiuni tridimensional, după cum starea plană de tensiuni este legată de un sistem tridimensional de deformații specifice. Starea plană de deformații specifice se realizează, de exemplu, într-un corp prismatic în care, în orice plan perpendicular pe axa longitudinală *Oz*, apar aceleaşi deformații. Aceasta presupune însă $\sigma_z \neq 0$.

Scopul principal este determinarea alungirilor specifice şi a lunecării specifice pe direcțiile normală şi tangențială la un plan înclinat față de axele de coordonate, în funcție de alungirile specifice ε_x, ε_y şi lunecarea specifică γ_{xy}, raportate la planele de coordonate.

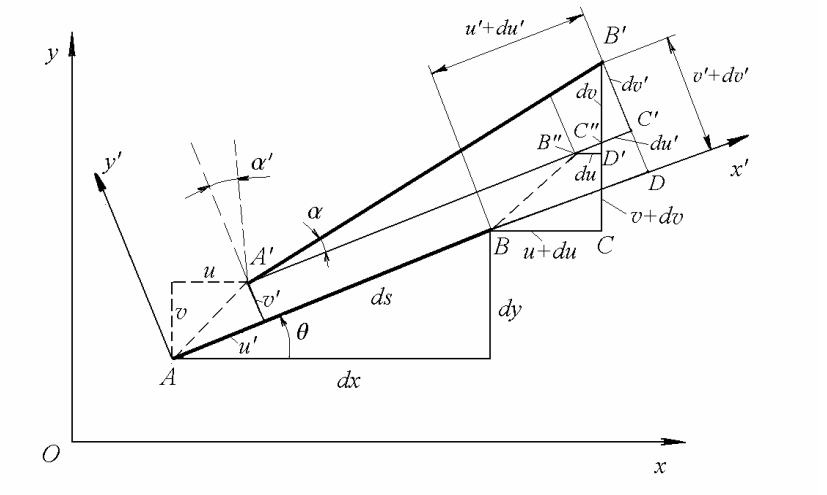


Fig. 9.9

Se consideră segmentul *AB*, de lungime *ds*, într-un corp elastic nedeformat (fig. 9.9). După deformare, *AB* se deplasează în *A'B'*. Deplasările lui *A* sunt *u* şi v,

iar deplasările lui B sunt $u+du$ şi $v+dv$. Variația deplasărilor cu poziția punctului considerat se exprimă sub forma

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\,. \tag{9.49}$$

Se alege un sistem de axe local $x'Ay'$ cu axa Ax' în lungul lui AB şi se calculează componentele deformațiilor specifice față de acest sistem rotit cu unghiul θ față de sistemul inițial. Se trasează $A'B''=AB$ paralel cu axa Ax' şi se prelungeşte până în C', la intersecția cu $B'D$, perpendiculară pe Ax'. În noul sistem de axe, deplasările lui A sunt u' şi v', iar deplasările lui B sunt $u'+du'$ şi $v'+dv'$.

9.4.1 Alungirile specifice

Alungirea pe direcția Ax' este

$$B''C'=du'=B''D'\cos\theta+B'D'\sin\theta=du\cos\theta+dv\sin\theta\,.$$

Împărțind la ds se obține alungirea specifică

$$\varepsilon_{x'}=\frac{du'}{ds}=\frac{du}{ds}\cos\theta+\frac{dv}{ds}\sin\theta\,.$$

Înlocuind în relația de mai sus expresiile (9.49), se obține

$$\varepsilon_{x'}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\sin\theta\,,$$

apoi, înlocuind $\cos\theta=\frac{dx}{ds}$ şi $\sin\theta=\frac{dy}{ds}$, rezultă

$$\varepsilon_{x'}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta\,.$$

Alungirea specifică în lungul direcției înclinate cu unghiul θ față de Ox este

$$\varepsilon_{x'}=\varepsilon_{\mathrm{x}}\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{9.50, a}$$

sau

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\theta\,. \tag{9.51, a}$$

Alungirea specifică $\varepsilon_{y'}$ se obține înlocuind θ prin $\theta+\pi/2$

$$\varepsilon_{y'}=\varepsilon_{\mathrm{x}}\sin^2\theta+\varepsilon_y\cos^2\theta-\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta\,. \tag{9.50, b}$$

9.4.2 Lunecarea specifică

Pentru calculul lunecării specifice $\gamma_{x'y'}$ se determină unghiul α cu care elementul *AB* s-a rotit față de poziția inițială (axa *Ox*')

$$\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha \cong \frac{dv'}{ds}.$$

Deoarece

$$B'C = dv' = dv\cos\theta - du\sin\theta,$$

împărțind la *ds* se obține

$$\alpha \cong \frac{dv'}{ds} = \frac{dv}{ds}\cos\theta - \frac{du}{ds}\sin\theta,$$

apoi, înlocuind expresiile (9.49) şi $\cos\theta = \frac{dx}{ds}$, $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$, rezultă

$$\alpha = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta,$$

sau

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\theta + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Analog se calculează rotirea α' a unui segment perpendicular pe *AB*

$$-\alpha' = \frac{\partial u}{\partial y}\cos^2\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\sin^2\theta + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Lunecarea specifică este deci

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \alpha' = \gamma_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta \qquad (9.50, c)$$

sau

$$\gamma_{x'y'} = -\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta. \qquad (9.51, b))$$

9.4.3 Alungiri specifice principale

Comparând relațiile (9.50) şi (9.51) cu (9.32) şi (9.33), se observă că au aceeaşi formă, primele putând fi obținute din ultimele două înlocuind σ cu ε şi τ cu $\gamma/2$.

Aceste înlocuiri se pot face în toate relațiile analoage. Astfel, *direcțiile principale ale deformațiilor specifice* (în lungul cărora $\gamma_{x'y'} = 0$) se calculează din

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \tag{9.52}$$

Deformațiile specifice principale sunt

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}\ . \tag{9.53}$$

Lunecările specifice maxime apar în plane înclinate la 45^0 față de planele principale şi au valorile

$$\gamma_{\max} = \pm\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2} = \pm\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right). \tag{9.54}$$

9.4.4 Rozeta tensometrică

Pentru determinarea completă a deformațiilor specifice într-un punct de pe suprafața unei piese, este necesară măsurarea alungirilor specifice pe trei direcții concurente în punctul respectiv. Aceasta se realizează cu ajutorul unei rozete, formate din trei traductoare tensometrice rezistive (v. *Anexa 6*), care se lipeşte pe piesa studiată. Este convenabil ca unghiurile dintre direcțiile traductoarelor să fie 45^0 sau 60^0.

Fie ε_a, ε_b, ε_c alungirile specifice măsurate cu rozeta de 45^0 (fig. 9.10). Dacă unghiul între ε_a şi alungirea specifică principală ε_1 este θ, atunci din relația (9.50) se obține

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos 2\theta\,, \\
\varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos\, 2\left(\theta + 45^{\mathrm{o}}\right), \\
\varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos\, 2\left(\theta + 90^{\mathrm{o}}\right).
\end{aligned} \tag{9.55}$$

Calculând $\varepsilon_a - \varepsilon_b$ şi $\varepsilon_b - \varepsilon_c$, apoi $\left(\varepsilon_a - \varepsilon_b\right)^2$ şi $\left(\varepsilon_b - \varepsilon_c\right)^2$, se elimină unghiul θ, rezultând alungirile specifice principale în funcție de alungirile specifice măsurate

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_a - \varepsilon_b\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \varepsilon_c\right)^2}\ . \tag{9.56}$$

Unghiul θ se determină din relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}. \qquad (9.57)$$

Valorile calculate cu relațiile (9.56) se utilizează apoi pentru calculul tensiunilor principale.

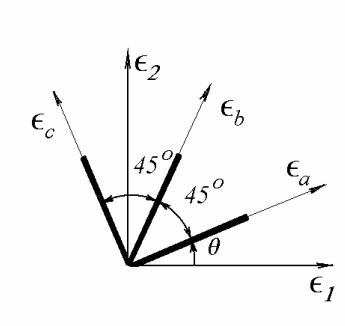


Fig. 9.10

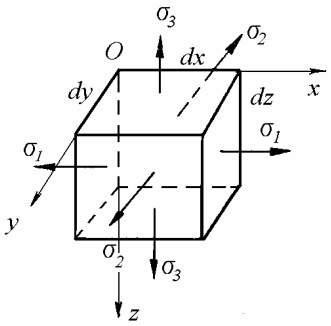


Fig. 9.11

9.5 Legea lui Hooke generalizată

Fie un element de volum paralelipipedic, având muchiile paralele cu direcțiile principale ale tensiunilor normale, pe fețele căruia acționează tensiunile principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (fig. 9.11).

Tensiunea σ_1 produce alungirile specifice $\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcția *Ox* şi alungirile specifice $\varepsilon_2' = -\nu\frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_3' = -\nu\frac{\sigma_1}{E}$ pe direcțiile *Oy*, respectiv *Oz*.

Analog, tensiunea σ_2 produce alungirile specifice $\varepsilon_1'' = -\nu\frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_3'' = -\nu\frac{\sigma_2}{E}$, iar tensiunea σ_3 produce alungirile specifice $\varepsilon_1''' = -\nu\frac{\sigma_3}{E}$, $\varepsilon_2''' = -\nu\frac{\sigma_3}{E}$, $\varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}$.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, alungirile specifice totale pe cele trei direcții se calculează însumând cele trei componente

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right],$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right], \qquad (9.58)$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right],$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, iar ν este coeficientul de contracție transversală.

Relațiile (9.58) reprezintă *legea lui Hooke generalizată* raportată la direcțiile principale.

Legea lui Hooke generalizată față de axe oarecare se scrie sub forma

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \qquad (9.59, a)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \qquad (9.59, b)$$

unde G este modulul de elasticitate transversal.

Se demonstrează că între constantele elastice E, G şi ν există relația

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}. \qquad (9.60)$$

Dacă în relațiile (9.59, *a*) se exprimă tensiunile în funcție de alungirile specifice, se obține

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e,$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e, \qquad (9.61)$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e,$$

unde

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \qquad (9.62, a)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}. \qquad (9.63)$$

Modulul de elasticitate transversal G şi constanta λ se numesc *constantele lui Lamé.*

În cazul stării plane de tensiuni, înlocuind $\sigma_3 = 0$ în relațiile (9.58) rezultă

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\,\sigma_2), \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\,\sigma_1), \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Exprimând tensiunile principale în funcție de deformațiile specifice principale, rezultă

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_2), \qquad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_1). \qquad (9.64)$$

Deoarece $\varepsilon_3 \neq 0$, rezultă că starea plană de tensiuni produce o stare tridimensională de deformații specifice.

9.6 Ecuația lui Poisson

Elementul din figura 9.11 are volumul

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

În urma deformării corpului, volumul devine

$$\mathrm{d}V + \Delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,(1+\varepsilon_x)\,\mathrm{d}y\,(1+\varepsilon_y)\,\mathrm{d}z\,(1+\varepsilon_z).$$

Neglijând produsele a două sau trei deformații specifice în raport cu acestea, se obține

$$\mathrm{d}V + \Delta\mathrm{d}V \cong \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

deci

$$\Delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}V\,(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Deformația volumică specifică (9.62, *a*) este

$$e = \frac{\Delta\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Înlocuind deformațiile specifice prin expresiile (9.59, *a*), rezultă

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m. \qquad (9.62,\ b)$$

unde *tensiunea medie*

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z). \qquad (9.65)$$

Relația (9.62, *b*) se mai scrie sub forma

$$\sigma_m = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)} e = K\, e \tag{9.66}$$

şi se numeşte *ecuația lui Poisson*.

Constanta de proporționalitate între σ_m şi e este *modulul de elasticitate volumic* al materialului

$$K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}. \tag{9.67, a}$$

Se mai stabilesc egalitățile

$$K = \frac{2G\left(1+\nu\right)}{3\left(1-2\nu\right)} = \lambda + \frac{2}{3}G. \tag{9.67, b}$$

Din relația (9.62, *b*) rezultă că la materialele incompresibile, pentru care $e = 0$, coeficientul lui Poisson este $\nu \cong 0{,}5$. La cauciucul butil $\nu = 0{,}495$.

În cazul unui element cubic, supus la presiune "hidrostatică" p, starea de tensiuni este descrisă de $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $\sigma_m = -p$, $e = -\frac{p}{K}$, deci contracția unității de volum este proporțională cu presiunea şi invers proporțională cu K.

9.7 Energia de deformație

La elementul infinitezimal din figura 9.11, pe direcția axei Ox acționează forța $\sigma_1 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Când aceasta creşte de la zero la valoarea nominală, produce o deformație $\varepsilon_1 \mathrm{d}x$, deci produce lucrul mecanic elementar $\frac{1}{2}\left(\sigma_1 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\left(\varepsilon_1 \mathrm{d}x\right)$ care este egal cu energia de deformație acumulată de element

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_1 \varepsilon_1 \mathrm{d}V.$$

Rezultă că energia acumulată în unitatea de volum este

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1 \varepsilon_1.$$

Ținând seama şi de acțiunea celorlalte tensiuni σ_2 şi σ_3, se obține

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right),$$

sau, utilizând legea lui Hooke generalizată (9.58), rezultă *energia de deformaţie specifică totală*

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right). \qquad (9.68)$$

Faţă de axe oarecare

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right).$$

Energia specifică de variaţie a volumului

Dacă elementul de volum este solicitat pe toate feţele de aceeaşi tensiune, deformaţia are loc numai prin variaţia volumului. Astfel, aplicând pe toate feţele tensiunea medie (9.65)

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

se produce o deformaţie volumică specifică *e*, iar *energia specifică de variaţie a volumului* este

$$U_{0v} = \frac{\sigma_m e}{2} = \frac{\sigma_m}{2}\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\frac{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2}{9},$$

deci

$$U_{0v} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2, \qquad (9.69)$$

sau

$$U_{0v} = \frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{1}{18K}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)^2. \qquad (9.70)$$

Energia specifică de variaţie a formei

Diferenţa între energia specifică totală U_0 şi cea de variaţie a volumului U_{0v} reprezintă *energia specifică de variaţie a formei*

$$U_{0f} = U_0 - U_{0v} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) - \\ - \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

sau

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]. \qquad (9.71)$$

Față de axe oarecare

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{2E}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right].$$

În funcție de tensiunea tangențială octaedrică (9.26), energia specifică de variație a formei se scrie

$$U_{0f} = \frac{3\left(1+\nu\right)}{2E}\,\tau_{oct}^2 = \frac{3}{4G}\,\tau_{oct}^2 \qquad (9.72)$$

În cazul solicitării de întindere simplă, înlocuind $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ şi $\sigma_1 = \sigma_x$ în relația (9.71), se obține

$$U_{0f_e} = \frac{1+\nu}{3E}\,\sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{6G} \qquad (9.73)$$

9.8 Compozite armate cu fibre

Un compozit stratificat, numit pe scurt *stratificat*, este realizat din straturi cu fibre sau textură înglobate într-o matrice, numite *lamine*. Lamina cu fibre unidirecționale are proprietăți longitudinale (în lungul fibrelor) superioare celor transversale. Din acest motiv laminele sunt combinate în diferite orientări pentru a obține proprietățile generale dorite.

În continuare se consideră doar stratificate simetrice față de planul median. Pentru cazul nesimetric se pot consulta tratate de specialitate [35, 64].

9.8.1 Lamina ortotropă

Se consideră o lamină cu fibre unidirecționale, solicitată la o stare plană de tensiuni. Se aleg două sisteme de coordonate, unul local - ataşat de lamină şi unul

global - ataşat de stratificat. Sistemul de axe local are axa *Ox* în lungul fibrelor şi axa *Oy* în planul laminei, perpendiculară pe fibre. Sistemul de axe global are axele *OX* şi *OY* în planul median al stratificatului simetric.

Lamina este anizotropă. În general, pentru a descrie complet un material anizotrop solicitat la o stare triaxială de tensiuni, relaţia între tensiuni şi deformaţii specifice se exprimă printr-o matrice simetrică, de dimensiuni 6×6, în care apar 21 constante elastice independente. Pentru un material ortotrop solicitat triaxial sunt necesare 9 constante elastice independente.

Pentru un material ortotrop solicitat la o stare biaxială de tensiuni, legea lui Hooke conţine 4 constante elastice independente.

9.8.1.1 Lamina cu ortotropie axată

Pentru o lamină cu fibrele orientate în direcţia globală *OX* (fig. 9.12, *a*), relaţiile între deformaţii specifice şi tensiuni sunt

$$\varepsilon_X=\frac{\sigma_X}{E_x}-\nu_{yx}\frac{\sigma_Y}{E_y},\qquad \varepsilon_Y=\frac{\sigma_Y}{E_y}-\nu_{xy}\frac{\sigma_X}{E_x},\qquad \gamma_{XY}=\frac{\tau_{XY}}{G_{xy}} \tag{9.74}$$

unde E_x şi E_y sunt modulele de elasticitate longitudinale în direcţiile *x* şi *y*, G_{xy} este modulul de elasticitate transversal în planul *xOy*, ν_{xy} şi ν_{yx} sunt coeficienţii de contracţie transversală (ν_{xy} defineşte contracţia pe direcţia *y* produsă de alungirea pe direcţia *x*).

Relaţiile (9.74) se mai scriu matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & 0\\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix} \tag{9.75}$$

sau

$$\{\varepsilon\}=[S]\{\sigma\} \tag{9.76}$$

unde $[S]$ se numeşte *matricea de flexibilitate* a laminei sau *matricea complianţelor*.

Prin particularizare de la cazul triaxial, matricea $[S]$ se mai scrie

$$[S]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{26}\\ S_{61} & S_{62} & S_{66}\end{bmatrix}, \tag{9.77}$$

unde elementele se determină prin identificare cu matricea din ecuaţia (9.75).

Dacă se exprimă tensiunile în funcție de deformațiile specifice, ecuațiile (9.73) devin

$$\sigma_X = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\varepsilon_X + \nu_{yx}\,\varepsilon_Y\right),$$

$$\sigma_Y = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\varepsilon_Y + \nu_{xy}\,\varepsilon_X\right), \tag{9.78}$$

$$\tau_{XY} = G_{xy}\,\gamma_{XY}\,.$$

În formă matricială, relațiile (9.78) se scriu

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0\\ \dfrac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0\\ 0 & 0 & G_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix} \tag{9.79}$$

sau

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{9.80}$$

unde $[C]$ se numeşte *matricea de rigiditate* a laminei.

Matricea simetrică $[C]$ se mai scrie

$$[C] = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{26}\\ C_{61} & C_{62} & C_{66}\end{bmatrix}, \tag{9.81}$$

iar elementele se determină prin identificare cu matricea din ecuația (9.79)

Matricea de rigiditate este inversa matricii de flexibilitate

$$[C] = [S]^{-1}. \tag{9.82}$$

9.8.1.2 Lamina cu ortotropie dezaxată

Pentru o lamină cu fibrele orientate într-o direcție care face unghiul θ cu direcția globală OX (fig. 9.12, *b*), tensiunile şi deformațiile specifice definite în sistemul de coordonate al stratificatului trebuie exprimate în funcție de tensiunile şi deformațiile specifice în sistemul de coordonate al laminei, față de care se definesc

caracteristicile elastice. Pentru aceasta se utilizează relaţiile de transformare a tensiunilor (9.32), scrise pentru planul *xOy*, şi relaţiile de transformare a deformaţiilor specifice (9.50).

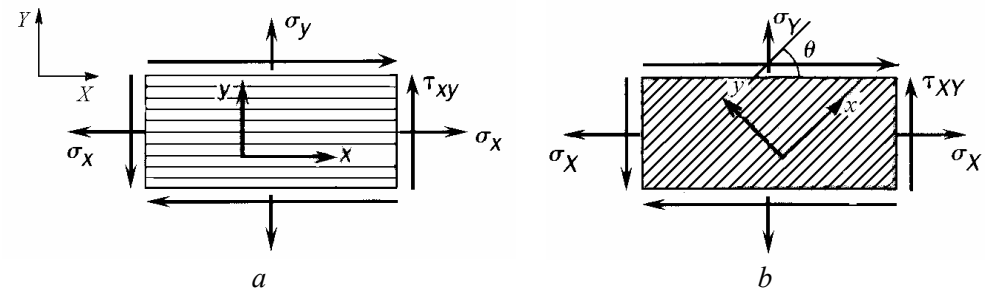


Fig. 9.12

Pentru calculul rigidităţilor faţă de direcţiile globale se procedează astfel:

1. Se determină deformaţiile specifice în coordonate locale, în funcţie de deformaţiile specifice în coordonate globale. Relaţiile (9.50) se scriu matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \tag{9.83}$$

unde s-a notat $c = \cos\theta$ şi $s = \sin\theta$.

2. Se calculează tensiunile faţă de direcţiile locale în funcţie de deformaţiile specifice faţă de direcţiile locale folosind relaţiile (9.79) în care s-au înlocuit indicii cu litere mari prin indici cu litere mici

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{9.84}$$

3. Se exprimă tensiunile faţă de direcţiile globale în funcţie de tensiunile faţă de direcţiile locale utilizând relaţiile (9.32) scrise pentru planul *xOy* şi în care se înlocuieşte $\alpha = -\theta$ (rotire în sens invers)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{9.85}$$

Înlocuind (9.83) în (9.84) şi (9.84) în (9.85) se obțin tensiunile globale în funcție de deformațiile specifice globale

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{9.86}$$

În relația (9.86) rigiditățile globale au următoarele expresii

$$\overline{C}_{11} = B_1 + B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos 4\theta, \qquad \overline{C}_{12} = B_4 - B_3 \cos 4\theta,$$

$$\overline{C}_{22} = B_1 - B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos 4\theta, \qquad \overline{C}_{66} = \frac{1}{2}(B_1 - B_4) - B_3 \cos 4\theta, \tag{9.87}$$

$$\overline{C}_{16} = \frac{1}{2} B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 4\theta, \qquad \overline{C}_{26} = \frac{1}{2} B_2 \sin 2\theta - B_3 \sin 4\theta,$$

unde

$$B_1 = \frac{1}{8}(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \quad B_2 = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}),$$

$$B_3 = \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}), \tag{9.88}$$

$$B_4 = \frac{1}{8}(C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}).$$

Înlocuind constantele (9.88) în relațiile (9.87) rezultă

$$\overline{C}_{11} = C_{11} \cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{22} \sin^4\theta,$$

$$\overline{C}_{22} = C_{11} \sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{22}\, cos^4\theta,$$

$$\overline{C}_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \tag{9.89, a}$$

$$\overline{C}_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \sin^2\theta \cos^2\theta + C_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta),$$

$$\overline{C}_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin\theta \cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin^3\theta \cos\theta,$$

$$\overline{C}_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \sin^3\theta \cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \sin\theta \cos^3\theta.$$

La compozite cu proprietăți superioare, deobicei E_x este mult mai mare decât E_y sau G_{xy}. Întrucât ν_{xy} şi ν_{yx} au valori relativ mici, rigiditățile pot fi aproximate după cum urmează

$$\overline{C}_{11} \cong E_x \cos^4\theta, \qquad \overline{C}_{22} \cong E_x \sin^4\theta,$$

$$\overline{C}_{12} \cong E_x \sin^2\theta\cos^2\theta, \qquad \overline{C}_{66} \cong E_x \sin^2\theta\cos^2\theta, \qquad (9.89, b)$$

$$\overline{C}_{16} \cong E_x \sin\theta\cos^3\theta, \qquad \overline{C}_{26} \cong E_x \sin^3\theta\cos\theta.$$

Similar, se calculează deformaţiile specifice globale în funcţie de tensiunile globale

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{21} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{61} & \overline{S}_{62} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}. \qquad (9.90)$$

În relaţia (9.90) elementele matricii de flexibilitate sunt

$$\overline{S}_{11} = D_1 + D_2\cos 2\theta + D_3\cos 4\theta, \qquad \overline{S}_{66} = 2\left(D_1 - D_4\right) - 4D_3\cos 4\theta,$$

$$\overline{S}_{22} = D_1 - D_2\cos 2\theta + D_3\cos 4\theta, \qquad \overline{S}_{12} = D_4 - D_3\cos 4\theta, \qquad (9.91)$$

$$\overline{S}_{16} = D_2\sin 2\theta + 2D_3\sin 4\theta, \qquad \overline{S}_{26} = D_2\sin 2\theta - 2D_3\sin 4\theta,$$

unde

$$D_1 = \frac{1}{8}\left(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}\right), \qquad D_2 = \frac{1}{2}\left(S_{11} - S_{22}\right),$$

$$D_3 = \frac{1}{8}\left(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}\right), \qquad (9.92)$$

$$D_4 = \frac{1}{8}\left(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{66}\right).$$

Pe baza acestora se pot calcula modulele de elasticitate ale laminei cu fibrele orientate la un unghi θ faţă de direcţiile globale

$$E_X = \frac{1}{\overline{S}_{11}}, \qquad E_Y = \frac{1}{\overline{S}_{22}}, \qquad G_{XY} = \frac{1}{\overline{S}_{66}}. \qquad (9.93)$$

9.8.1.3 Deformaţia laminei la întindere uniaxială

Este interesant de calculat care este forma deformată a unei platbande de compozit stratificat, solicitată la întindere uniaxială pe o direcţie înclinată faţă de fibre, dacă se cunosc E_x, E_y, ν_{xy} şi G_{xy}.

Rezultatul este dat de semnul lunecării specifice γ_{XY}. Dacă $\sigma_Y = \tau_{XY} = 0$ şi $\sigma_X > 0$, atunci din (9.90) rezultă $\gamma_{XY} = \overline{S}_{61}\sigma_X$, deci γ_{XY} are acelaşi semn ca $\overline{S}_{61}$. Pentru unghiuri θ mici

$$\bar{S}_{61} = D_2 \sin 2\theta + 2D_3 \sin 4\theta = \left(2D_2 + 8D_3\right)\theta =$$

$$= \left(2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}\right)\theta = \left(2\frac{1+\nu_{xy}}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}}\right)\theta = \left[2\left(1+\nu_{xy}\right) - \frac{E_x}{G_{xy}}\right]\frac{\theta}{E_x} < 0$$

deoarece $\frac{E_x}{G_{xy}} = 10,...,30$. Rezultă că $\gamma_{XY} < 0$ şi deci platbanda deformată are forma din figura 9.13.

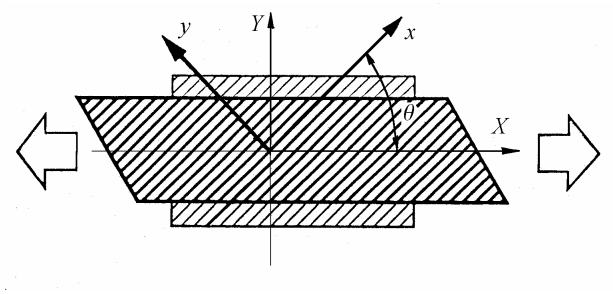


Fig. 9.13

9.8.2 Stratificatul simetric

Un stratificat simetric se comportă ca o placă anizotropă omogenă. Sub încărcări în planul stratificatului, modulele de elasticitate efective sunt medii aritmetice ale modulelor de elasticitate ale laminelor constituente. Eforturile de membrană sunt decuplate de cele de încovoiere.

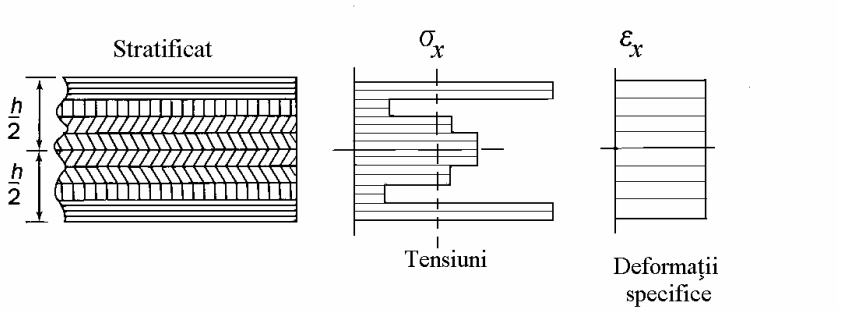


Fig. 9.14

Laminele sunt lipite una de alta, astfel că atunci când sunt solicitate mecanic ele au aceleaşi deformații specifice. Deoarece rigiditățile laminelor sunt diferite, tensiunile în lamine diferă (fig. 9.14).

9.8.2.1 Tensiuni şi deformații specifice la încărcări coplanare

Pentru caracterizarea stării de tensiuni într-un stratificat simetric se folosesc tensiuni medii. Acestea se definesc prin relațiile

$$\overline{\sigma}_X = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_X \, \mathrm{d}Z\,, \qquad \overline{\sigma}_Y = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_Y \, \mathrm{d}Z\,, \qquad \overline{\tau}_{XY} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{XY} \, \mathrm{d}Z\,, \qquad (9.94)$$

unde h este grosimea stratificatului.

În formă matricială

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} dZ = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} dZ \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}, \quad (9.95)$$

unde $[A]$ este matricea de rigiditate a stratificatului.

Primul element al matricii de rigiditate are expresia

$$A_{11} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \overline{C}_{11} \, \mathrm{d}Z = \frac{2}{h}\int_{0}^{h/2} \overline{C}_{11} \, \mathrm{d}Z\,. \qquad (9.96, a)$$

În cadrul unei lamine, coeficienții $\overline{C}_{ij}$ sunt constanți. Integrala (9.96, *a*) poate fi înlocuită printr-o sumă

$$A_{11} = \frac{2}{h}\sum_i \overline{C}_{11}^{\,i} \, \mathrm{d}Z = \frac{2}{h}\sum_i \overline{C}_{11}^{\,i} \, h_i = \sum_i \overline{C}_{11}^{\,i} \left(\frac{2\,h_i}{h}\right). \qquad (9.96, b)$$

Matricea de rigiditate pentru un stratificat simetric se poate obține adunând termenii corespunzători ai matricei de rigiditate pentru fiecare lamină înmulțiți cu *procentul volumic* $v_i = \dfrac{2\,h_i}{h}$ în lamina *i*

$$[A] = \sum_i v_i \left[\overline{C}^{\,i}\right]. \qquad (9.97)$$

După ce se calculează matricea $[A]$, aceasta poate fi inversată pentru a obține matricea de flexibilitate a stratificatului $[a] = [A]^{-1}$. Valorile modulelor de elasticitate pentru stratificat se pot calcula cu relațiile

$$E_X = \frac{1}{a_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}, \qquad E_Y = \frac{1}{a_{22}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}}, \tag{9.98}$$

$$G_{XY} = \frac{1}{a_{66}} = A_{66}, \qquad \nu_{XY} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{A_{21}}{A_{22}}, \qquad \nu_{YX} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Într-un calcul aproximativ, elementul A_{11} al matricii de rigiditate se poate scrie

$$A_{11} \cong E_x \sum_i v_i \cos^4\theta_i, \tag{9.99}$$

unde v_i este procentul volumic al laminei cu fibre înclinate la θ_i în stratificat.

Modulul de elasticitate longitudinal al stratificatului poate fi aproximat prin relația

$$E_X \cong \sum_i v_i \, E_{x\mathrm{i}} \cos^4\theta_i, \tag{9.100}$$

unde E_{xi} este modulul de elasticitate al stratificatului cu fibre înclinate cu unghiul θ_i şi procent volumic v_i.

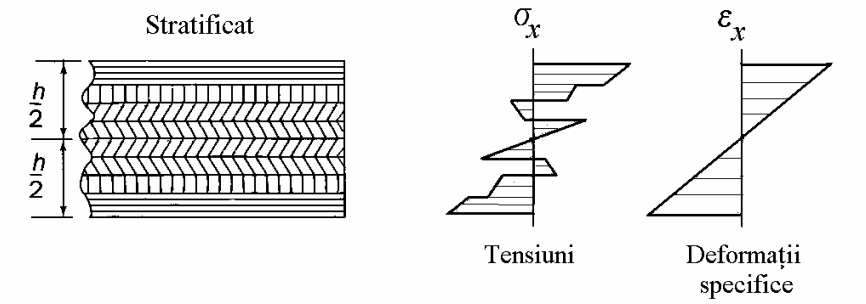


Fig. 9.15

9.8.2.2 Tensiuni şi deformații specifice la încovoiere

Dacă un stratificat simetric este solicitat la încovoiere, deformațiile specifice au o distribuție liniară (fig. 9.15) dar tensiunile au o variație neliniară cu salturi, datorită rigidităților diferite ale laminelor componente.

O analiză similară cu cea din paragraful precedent arată că termenii matricei de rigiditate a stratificatului au forma

$$D_{11} = \sum_i \overline{C}_{11}^{i} \left(\frac{I_i}{I_{tot}} \right), \tag{9.101}$$

unde I_i şi I_{tot} sunt momentele de inerție axiale ale laminei *i,* respectiv ale stratificatului. Prin inversarea matricei $[D]$ se obține matricea de flexibilitate a stratificatului şi apoi constantele elastice echivalente ale stratificatului.

9.9 Tensiuni termice

Un corp elastic neconstrâns, încălzit uniform, se dilată liber. Variația temperaturii produce alungiri specifice fără să apară tensiuni normale. Încălzirea uniformă nu produce lunecări specifice şi nici tensiuni tangențiale. În corpurile din materiale izotrope apar tensiuni termice dacă dilatarea produsă de încălzire uniformă este împiedicată sau dacă încălzirea produce un câmp neuniform de temperaturi. Tensiuni termice apar şi în materiale anizotrope chiar într-un câmp uniform de temperaturi.

În general, se consideră că tensiunile termice nu influențează câmpul de temperaturi, alungirile specifice calculându-se prin suprapunere liniară, adăugând alungirile specifice termice la cele datorite tensiunilor normale produse de sarcinile exterioare. În cazul stării plane de tensiuni, relațiile (9.59) devin

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha T\,,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha T\,, \tag{9.102}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,$$

unde $T(x,y)$ este variația temperaturii iar α este coeficientul de dilatare termică liniară.

În termoelasticitate, ecuațiile diferențiale de echilibru (9.46) şi (9.47), relațiile între deformații specifice şi deplasări (3.20) şi deci ecuația de compatibilitate (3.21), ca şi condițiile la limită (9.3) rămân nemodificate, fiind bazate pe considerente pur mecanice sau geometrice.

Înlocuind deformațiile specifice (9.102) în ecuația de compatibilitate (3.21), ținând cont de ecuațiile de echilibru (9.46) şi (9.47) în care se neglijează forțele volumice, se obține o ecuație de compatibilitate exprimată în tensiuni

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y + \alpha E T\right) = 0\,. \tag{9.103}$$

Exemplul 9.1

Se consideră bara de secțiune dreptunghiulară din figura 9.16, *a*, liberă la capete, supusă unei variații de temperatură $T(y)=\frac{T_0}{4}\left(3-\frac{2y}{c}-\frac{y^2}{c^2}\right)$, la care se calculează distribuția tensiunilor termice pe înălțimea secțiunii.

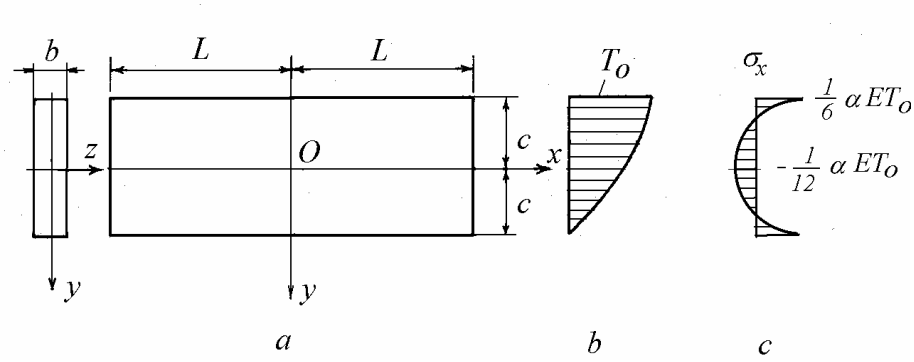


Fig. 9.16

Deoarece $\sigma_y=\tau_{xy}=0$, $\sigma_x=\sigma_x(y)$, ecuația (9.103) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\sigma_x+\alpha E T\right)=0, \tag{9.104}$$

de unde rezultă

$$\sigma_x=-\alpha E T+c_1 y+c_2. \tag{9.105}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită la capete. La $x=\pm L$ forța axială şi momentul încovoietor trebuie să fie nule

$$\int_{-c}^{c}\sigma_x b\,\mathrm{d}y=0, \qquad \int_{-c}^{c}\sigma_x y b\,\mathrm{d}y=0. \tag{9.106}$$

Înlocuind expresia (9.105) în relațiile (9.106) rezultă

$$c_1=\frac{3}{2c^3}\int_{-c}^{c}\alpha E T y\,\mathrm{d}y, \quad c_2=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\alpha E T\,\mathrm{d}y. \tag{9.107}$$

Dacă se notează momentul de inerție axial $I_z=2c^3b/3$ şi aria $A=2bc$, se obține relația generală de calcul al tensiunilor termice

$$\sigma_x=\alpha E\left(-T+\frac{b}{A}\int_{-c}^{c}T\,\mathrm{d}y+\frac{y}{I_z}\int_{-c}^{c}T y\,\mathrm{d}y\right). \tag{9.108}$$

Pentru distribuția de temperaturi din figura 9.16, *b* se obține

$$\sigma_x = \alpha E\left[-\frac{T_0}{4}\left(3-\frac{2y}{c}-\frac{y^2}{c^2}\right)+\frac{2T_0}{3}-\frac{T_0}{2}\frac{y}{c}\right]=-\alpha E\,\frac{T_0}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{y^2}{c^2}\right).$$

Distribuția tensiunilor termice este ilustrată în figura 9.16, *c*.

9.10 Tensiuni de contact

Pe suprafețele de contact a două corpuri în interacțiune mecanică se dezvoltă presiuni de valori relativ mari. Exemple tipice sunt rulmenții, dinții roților în agrenare, mecanismele cu came, roțile de tren pe şina de cale ferată şi rulourile de rezemare ale podurilor. Suprafețele de contact fiind foarte mici, forțele de compresiune produc presiuni şi tensiuni de contact relativ mari. Problema este studiată cu metodele Teoriei elasticității (teoria lui H. Hertz, 1881), interesând atât presiunile de contact cât şi tensiunile în vecinătatea zonei de contact.

Starea de tensiuni într-o bilă de rulment, în vecinătatea zonei de contact, este de compresiune triaxială, solicitare la care materialul rezistă mai bine decât la compresiune simplă, astfel încât pentru un oțel OL37, cu limita de curgere la compresiune uniaxială $\sigma_c = 210\,\text{MPa}$, se admite o presiune admisibilă de 760 MPa, iar la oțelul de rulmenți presiunea de contact admisibilă ajunge la 3800 MPa.

Se demonstrează că, în lungul liniei perpendiculare pe suprafața de contact, tensiunile tangențiale au valori maxime la o mică distanță de zona de contact, şi nu la suprafața piesei în contact cu bila. Aceasta explică ruperile locale care duc la exfolieri, cojiri, desprinderi ("spalling") şi defecte punctiforme ("pitting"), generate de fisuri inițiate la adâncimi de ordinul a 100 μm sau chiar mai mici, în special în inelele rulmenților.

În cazul unei bile de diametru *D*, apăsate cu o forță *F* pe o suprafață plană (fig. 9.17), raza cercului de contact are valoarea

$$r = 0{,}88\left(\frac{FD}{E}\right)^{1/3}, \tag{9.109}$$

unde *E* este modulul de elasticitate longitudinal al celor două materiale (considerat acelaşi).

Presiunea maximă în centrul suprafeței de contact este

$$p_{max} = 0{,}62\left(\frac{FE^2}{D^2}\right)^{1/3}. \tag{9.110}$$

În cazul unui cilindru de diametru D şi lungime l, apăsat cu o forță F pe o suprafață plană (fig. 9.18) din acelaşi material, lățimea suprafeței dreptunghiulare de contact are valoarea

$$2b = 2{,}15\left(\frac{FD}{El}\right)^{1/2}, \tag{9.111}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al celor două materiale.

Presiunea de contact are o distribuție eliptică, valoarea maximă fiind

$$p_{max} = 0{,}59\left(\frac{FE}{lD}\right)^{1/2}. \tag{9.112}$$

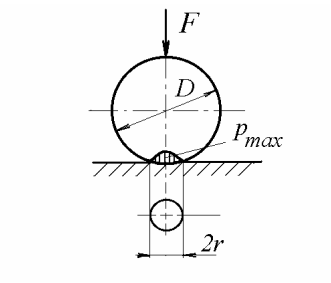


Fig. 9.17

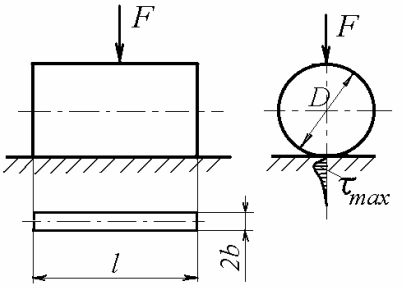


Fig. 9.18

În cazul contactului a două sfere de diametru d_1, respectiv d_2, dimensiunile suprafeței de contact şi valoarea maximă a presiunii de contact se obțin din relațiile (9.109) şi (9.110), înlocuind diametrul D prin $d_1 d_2/(d_1 + d_2)$. Pentru o bilă de diametru d_1 apăsată în interiorul unei suprafețe sferice de diametru $d_2 > d_1$, se înlocuieşte diametrul D prin $d_1 d_2/(d_2 - d_1)$.

În cazul contactului a doi cilindri paraleli, de diametru d_1, respectiv d_2, lățimea suprafeței de contact şi valoarea maximă a presiunii de contact, se obțin din relațiile (9.111) şi (9.112), înlocuind diametrul D prin $d_1 d_2/(d_1 + d_2)$. Pentru materiale cu coeficientul de contracție transversală $\nu = 0{,}3$ tensiunea tangențială maximă apare la o distanță $0{,}78\,b$ de suprafața de contact, având valoarea $\tau_{max} = 0{,}304\,p_{max}$ [61].

Relațiile de mai sus sunt valabile atunci când dimensiunile suprafeței de contact sunt mici în comparație cu raza bilei sau a cilindrului, când materialele sunt liniar-elastice fără să se depăşească limita de proporționalitate şi când pe suprafața de contact acționează numai forțe normale, nu şi forțe tangențiale.

10.
TEORII DE REZISTENȚĂ

La o bară solicitată la întindere uniaxială, *ruperea* se produce atunci când tensiunea normală atinge valoarea σ_r, *curgerea* se produce când tensiunea normală are valoarea σ_c, atingerea limitei de elasticitate se produce la valoarea σ_e etc. Toate acestea pot fi considerate *stări limită*.

În cazul pieselor supuse la stări plane sau spațiale de tensiuni, se pune problema determinării condițiilor în care se atinge o anumită stare limită. Deoarece stările limită se definesc prin valori ale tensiunilor determinate experimental, prin încercarea la tracțiune a epruvetelor solicitate unidirecțional, interesează *în ce condiții o stare plană sau spațială de tensiuni produce într-o piesă o stare limită analogă celei realizate la întinderea uniaxială.*

În limitele comportării elastice a unui material, o anumită stare limită (de exemplu limita de elasticitate) poate fi definită prin cinci mărimi caracteristice:

a) tensiunea de întindere, σ_e;

b) alungirea specifică, $\varepsilon_e = \dfrac{\sigma_e}{E}$;

c) tensiunea tangențială maximă, $\tau_e = \dfrac{\sigma_e}{2}$;

d) energia specifică de deformație totală, $U_{0e} = \dfrac{\sigma_e^2}{2E}$;

e) energia specifică de deformație pentru variația formei, $U_{0f_e} = \dfrac{1+\nu}{3E}\sigma_e^2$,

unde E este modulul de elasticitate longitudinal iar ν este coeficientul de contracție transversală.

La solicitarea de întindere simplă este suficientă una singură dintre aceste mărimi pentru definirea stării de solicitare, deci a stării limită, deoarece ele sunt atinse simultan.

La solicitarea pe mai multe direcții, atingerea valorii corespunzătoare unei anumite stări limită pentru una dintre cele cinci mărimi (ce definesc o asemenea stare) nu coincide cu atingerea simultană a valorilor corespunzătoare acelei stări pentru celelalte patru mărimi. Definind starea tridimensională de tensiuni dintr-un punct prin tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, se pune problema: ce relație trebuie să existe între acestea pentru a se atinge una dintre cele cinci mărimi caracteristice ale stării limită.

Teoriile de rezistență (numite şi *teorii ale stărilor limită*) permit stabilirea acestor relații prin care se defineşte o tensiune echivalentă σ_{ech} a stării plane sau spațiale, care este comparată cu tensiunea la starea limită de la întinderea uniaxială.

10.1 Teoriile clasice de rezistență

I. ***Teoria tensiunii normale maxime*** (W. J. M. Rankine, 1858)

Conform teoriei I, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când tensiunea normală maximă din corp devine egală cu tensiunea normală a stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială.*

De exemplu, limita de elasticitate se atinge atunci când

$$\sigma_1 = \sigma_e ,$$

deci tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{I}} = \sigma_1 . \qquad (10.1)$$

II. ***Teoria alungirii specifice maxime*** (B. de Saint Venant, 1855)

Conform teoriei a II-a, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când alungirea specifică maximă din corp devine egală cu alungirea specifică corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

În cazul limitei de elasticitate,

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E},$$

deci tensiunea echivalentă, care se compară cu σ_e, este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right). \qquad (10.2)$$

III. ***Teoria tensiunii tangențiale maxime***
(Ch. A. Coulomb, H. E. Tresca 1865, J. J. Guest 1903)

Conform teoriei a III-a, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă devine egală cu tensiunea tangențială maximă corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

Luând ca stare limită atingerea limitei de elasticitate, se poate scrie

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2},$$

iar tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 . \tag{10.3}$$

IVa. ***Teoria energiei totale de deformație***
(E. Beltrami 1885, P. B. Haigh 1917)

Conform teoriei a IV-a, varianta *a*, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când energia de deformație specifică totală egalează energia de deformație specifică totală corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

La limita de elasticitate, utilizând relația (9.68), se obține

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) = U_{0e} = \frac{\sigma_e^2}{2E},$$

astfel că tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{IV}a} = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]^{1/2}, \tag{10.4}$$

relație care, la materiale tenace, se aplică atunci când tensiunea medie este pozitivă, $\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) > 0$.

IVb. ***Teoria energiei de variație a formei***
(M. T. Huber 1904, R. von Mises 1913, H. Hencky 1924)

Conform teoriei a IV-a, varianta *b*, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când energia specifică de variație a formei egalează energia specifică de variație a formei corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială.*

În cazul limitei de elasticitate

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] = U_{0f_e} = \frac{1+\nu}{6E}\,2\sigma_e^2,$$

deci tensiunea echivalentă are expresia

$$\sigma_{ech\,\mathrm{IV}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}, \qquad (10.5)$$

Această teorie se aplică atunci când tensiunea medie $\sigma_m < 0$.

Deoarece energia specifică de variație a formei se exprimă convenabil în funcție de tensiunile tangențiale octaedrale

$$U_{0f} = \frac{3}{4G}\tau_{oct}^2,$$

teoria a IV-a, varianta *b*, cunoscută ca *teoria lui von Mises*, se mai numeşte şi *teoria tensiunii tangențiale octaedrale maxime*.

Aplicarea teoriilor de rezistență se face diferit la materiale *tenace* şi la materiale *fragile*. Astfel, la materialele tenace se recomandă utilizarea relațiilor date de teoriile a III-a şi a IV-a, varianta *b*, iar la materiale fragile, utilizarea teoriei a II-a. În primul caz se formulează *criterii de curgere*, iar la materiale fragile se folosesc *criterii de rupere*. Totuşi este cunoscut faptul că o clasificare netă a materialelor în tenace şi fragile este dificilă, deoarece nu există o graniță clară între cele două tipuri de comportări, care depind de temperatură, viteza de încărcare, tipul solicitării şi condițiile de mediu ambiant. În plus, ruperile fragile se studiază în cadrul altei discipline, denumite *Mecanica ruperii*.

10.2 Criterii de curgere

În cazul materialelor tenace, se consideră o comportare liniară până la atingerea limitei de curgere σ_c şi se alege *curgerea* drept stare limită.

Experiențele au arătat că la metale ductile teoriile bazate pe tensiunea tangențială maximă sau pe tensiunea tangențială octaedrală oferă o bază pentru predicția apariției curgerii. Astfel s-au elaborat *criteriile de curgere*.

10.2.1 Criteriul lui Tresca

Curgerea, conform acestui criteriu, *începe atunci când tensiunea tangențială maximă din corp atinge valoarea la care începe curgerea la întinderea sau compresiunea uniaxială*, deci când

$$\tau_{max} = 0{,}5\,\sigma_c \,. \qquad (10.6)$$

Se presupune că τ_{max} este acelaşi la întindere şi la compresiune.

Experienţele au arătat că, la metalele cu comportare "elastică - perfect plastică", limita de curgere la forfecare este într-adevăr $\tau_c = 0{,}5\,\sigma_c$. Dar la unele materiale ductile, limita de curgere la forfecare, măsurată pentru starea de forfecare pură într-o încercare la răsucire, este $\tau_c = 0{,}577\,\sigma_c$, deci cu 15% mai mare decât valoarea prezisă de criteriul Tresca. Rezultă că acest criteriu este *acoperitor*, deoarece prezice apariţia curgerii la sarcini inferioare celor care o produc în realitate.

De notat că analiza stării de forfecare pură arată că tensiunea tangenţială maximă este egală cu tensiunile normale principale care apar la 45^0. Ar trebui deci, conform teoriei tensiunii normale maxime, ca limita de curgere la forfecare să fie egală cu limita de curgere la întindere, ceea ce contrazice experienţa. Rezultă că teoria I-a de rezistenţă nu este aplicabilă la materiale tenace.

10.2.2 Criteriul von Mises

Curgerea, conform acestui criteriu, *începe atunci când tensiunea tangenţială octaedrică din corp atinge valoarea la care începe curgerea în cazul încercării la tracţiune.*

Aceasta are loc atunci când energia de deformaţie specifică pentru variaţia formei atinge valoarea la care începe curgerea în cazul solicitării la întindere uniaxială, deci când

$$\frac{3}{4G}\tau_{oct}^2 = \frac{1}{6G}\sigma_c^2$$

sau atunci când

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_c = 0{,}471\,\sigma_c \,. \qquad (10.7)$$

Deci curgerea, conform criteriului *von Mises*, în orice punct al unei piese solicitate la o stare complexă de tensiuni, *începe atunci când tensiunea tangenţială octaedrică din corp devine egală cu* $0{,}471\,\sigma_c$*, unde* σ_c *este limita de curgere a materialului, determinată prin încercarea la tracţiune.*

De fapt, deoarece expresia energiei de deformaţie este independentă de semnul încărcării uniaxiale (întindere sau compresiune), criteriul lui *von Mises* este valabil şi la materiale cu limita de curgere diferită la întindere şi compresiune.

10.3 Criterii de rupere la materiale fragile

În cazul materialelor fragile, nu este suficientă o singură teorie de rezistență pentru a descrie ruperea. Teoria tensiunii normale maxime dă rezultate bune doar când tensiunea normală cu valoarea absolută cea mai mare este de întindere. În caz contrar, se utilizează alte criterii.

10.3.1 Criteriul Coulomb-Mohr

Ruperea, conform acestui criteriu, *apare atunci când o anumită combinație a tensiunii normale şi tensiunii tangențiale care acționează pe un plan în material atinge o valoare critică dată de*

$$|\tau| + \mu\sigma = \tau_i , \tag{10.8}$$

unde μ şi τ_i sunt constante de material.

Criteriul Coulomb-Mohr (O. Mohr, 1900) poate fi considerat un criteriu al tensiunii tangențiale, în care tensiunea tangențială limită creşte la valori mari ale compresiunii "hidrostatice".

Dacă se notează $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\mu}$, atunci se demonstrază că $\dfrac{\varphi}{2}$ este orientarea față de direcțiile principale a planului de rupere pe care acționează tensiunile

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \cos\varphi , \qquad |\tau'| = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \sin\varphi , \tag{10.9}$$

unde σ_1 şi σ_2 sunt tensiunile normale principale.

Din condiția (10.8) rezultă

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + m\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\,\tau_u , \tag{10.10}$$

unde noile constante sunt

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \cos\varphi , \quad \tau_u = \frac{\tau_i}{\sqrt{1+\mu^2}} = \tau_i \sin\varphi . \tag{10.11}$$

Se arată că rezistențele de rupere la tracțiune şi compresiune sunt date de

$$\sigma_{ut} = \frac{2\,\tau_u}{1+m} , \qquad \sigma_{uc} = -\frac{2\,\tau_u}{1-m} . \tag{10.12}$$

Eliminând τ_u între expresiile (10.12) se obține o relație între rezistențele de rupere la tracțiune şi compresiune

$$\sigma_{ut} = -\frac{1-m}{1+m}\sigma_{uc}, \tag{10.13}$$

deci constanta *m* este

$$m = \frac{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}}{\sigma_{uc} - \sigma_{ut}}. \tag{10.14}$$

Pentru $m > 0$, rezistența la tracțiune este mai mică decât cea la compresiune, ceea ce se observă experimental la materialele fragile.

Locul geometric al punctelor care definesc ruperea, pentru starea plană de tensiuni, poate fi reprezentat prin linia poligonală continuă din figura 10.1.

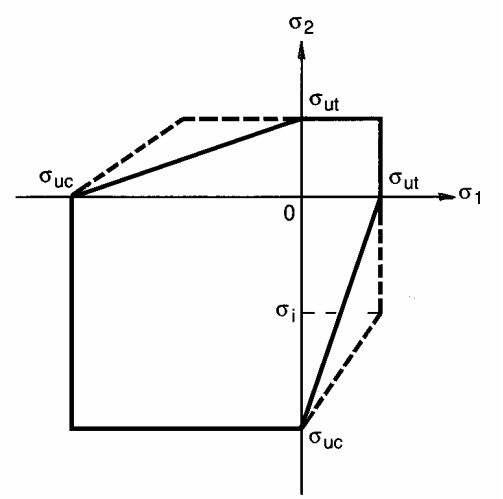


Fig. 10.1

Se constată că planele de rupere prezise de criteriul Coulomb-Mohr sunt incorecte, atât pentru o încercare uniaxială la întindere, cât şi pentru o încercare la torsiune, ele fiind orientate la unghiuri $\varphi/2$ față de planele reale de rupere.

10.3.2 Criteriul Mohr modificat

Pentru a evita erorile menționate mai sus, s-a elaborat *criteriul lui Mohr modificat*. Acesta este o combinație a *criteriului tensiunii normale maxime*, utilizat la stări de tensiuni dominate de întindere şi a *criteriului Coulomb-Mohr*, utilizat la stări de tensiuni dominate de compresiune.

În diagrama locului geometric de rupere (fig. 10.1), punctele care diferă de criteriul Coulomb-Mohr se află pe liniile întrerupte.

În relația (10.10), constanta *m* devine

$$m = \frac{\sigma_{uc} + \sigma_{ut} + \sigma_i}{\sigma_{uc} - \sigma_{ut} - \sigma_i}, \tag{10.15}$$

unde σ_i defineşte tensiunea la care cele două criterii coincid. Uneori se alege $\sigma_i = -\sigma_{ut}$, alteori calculul se face pe baza înclinării planului de rupere în încercările la compresiune.

A doua relație (10.12) devine

$$\sigma_{uc} = -\frac{2\tau'_u}{1-m}. \tag{10.16}$$

unde τ'_u diferă de rezistența la forfecare pură τ_u.

De notat că, solicitate la compresiune "hidrostatică" de valori mari, materialele fragile pot avea o comportare ductilă, ruperea având loc la tensiuni mai mari.

10.4 Aplicarea teoriilor de rezistență la stări plane de tensiuni

Înlocuind $\sigma_3 = 0$ în relațiile (10.1)-(10.5), se obțin formulele tensiunii normale echivalente în funcție de tensiunile principale şi coeficientul de contracție transversală

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ech\ \mathrm{I}} = \sigma_1, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{II}} = \sigma_1 - \nu\sigma_2, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{III}} = \sigma_1 - \sigma_2, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{IV}a} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{IV}b} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Dacă drept stare limită se alege starea corespunzătoare rezistenței admisibile σ_a, atunci calculul de verificare se face impunând condiția

$$\sigma_{ech} \le \sigma_a. \tag{10.18}$$

10.5 Aplicarea teoriilor de rezistență la bare

În cazul particular al barelor, înlocuind $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_z = 0$ şi $\tau_{xz} = \tau$ în relația (9.36) se obțin expresiile tensiunilor principale

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

care, prin substituire în relațiile (10.9), conduc la formulele tensiunii echivalente

$$\begin{aligned}
\sigma_{ech\ \mathrm{I}} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{II}} &= \frac{1-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{IV}a} &= \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\nu)\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{IV}b} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} .
\end{aligned} \qquad (10.19)$$

În prezent există şi alte teorii de rezistență, însă nici una nu poate descrie comportarea tuturor materialelor în orice stare de solicitare.

10.6 Criteriul Tsai-Hill pentru compozite stratificate

Rezistența unui compozit stratificat este determinată de rezistența laminelor componente. Un criteriu de rupere utilizat la compozite este *criteriul Tsai-Hill*. Acesta este bazat pe criteriul von Mises (teoria energiei de deformație de variație a formei), care a fost întâi extins de Hill la corpuri anizotrope, apoi aplicat de Tsai şi Azzi la materiale compozite.

Criteriul Tsai-Hill poate fi exprimat sub forma

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xt}^2} + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_f}\right)^2 = 1 \qquad (10.20)$$

unde σ_x este tensiunea în direcția fibrelor, σ_y - tensiunea perpendiculară pe fibre, σ_{xt} - rezistența la tracțiune în direcția fibrelor, σ_{yt} - rezistența la tracțiune

perpendicular pe fibre, τ_{xy} - tensiunea tangențială în planul laminei, τ_f - rezistența la forfecare.

Deoarece relația (10.20) este definită în sistemul local de coordonate al laminei şi tensiunile se dau deobicei în sistemul global al stratificatului, trebuie utilizate relațiile de transformare prezentate în capitolul 9.

Pentru solicitări în planul stratificatului, dacă se dau tensiunile în sistemul global *XOY*, deformațiile specifice se calculează utilizând matricea de flexibilitate a stratificatului

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [\, a \,] \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.21}$$

Pentru încărcări în planul stratificatului, deformațiile specifice (10.21) sunt aceleaşi în toate laminele, deci pot fi utilizate pentru a calcula tensiunile, folosind matricea de rigiditate pentru fiecare lamină

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}_i = [\, A \,]_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.22}$$

Relațiile (10.22), care dau tensiunile în fiecare lamină în sistemul global de axe al stratificatului, au forma (9.86)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.23}$$

Pentru a calcula tensiunile în sistemul local de axe al laminei se utilizează relațiile (9.32) scrise matriceal sub forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}, \tag{10.24}$$

în care $c = \cos\theta$ şi $s = \sin\theta$, unde θ este unghiul de înclinare al fibrelor față de direcția globală *OX*.

Aceste tensiuni se utilizează în *criteriul Tsai-Hill*, care de obicei se scrie sub forma unui coeficient de siguranță

$$c = \frac{\sigma_{xt}}{\left[\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \left(\frac{\sigma_{xt}}{\sigma_{yt}}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\sigma_{xt}}{\tau_f}\right)^2 \tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (10.25)$$

Acest criteriu nu se aplică în cazul ruperilor prin o serie de mecanisme specifice compozitelor, cum sunt delaminările în lungul fibrelor sau dezlipirile laminelor.

Exemplul 10.1

Un vas cilindric este fabricat dintr-un compozit stratificat simetric, din fibre de carbon în matrice epoxy. Vasul are diametrul $D = 0{,}6$ m şi grosimea peretelui $h = 10$ mm. Fibrele sunt dispuse în două straturi la 45^0, două straturi la -45^0 şi şase straturi la 0^0 față de axa cilindrului. Se cere să se calculeze presiunea interioară din vas care poate produce fisurarea peretelui vasului conform criteriului Tsai-Hill. Se cunosc proprietățile laminelor: $E_x = 207$ GPa, $\sigma_{xt} = 1200$ MPa, $E_y = 7{,}7$ GPa, $\sigma_{yt} = 28$ MPa, $G_{xy} = 4{,}9$ GPa, $\tau_f = 43$ MPa, $\nu_{xy} = 0{,}3$.

Rezolvare

Tensiunile în sistemul global (3.5) şi (3.6) sunt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pD/4h \\ pD/2h \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D/4h \\ D/2h \\ 0 \end{Bmatrix} p = \begin{Bmatrix} 15 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} p .$$

Matricea de rigiditate (9.79) în coordonate locale (în MPa) este

$$[C] = \begin{bmatrix} 207{,}7 & 2{,}3178 & 0 \\ 2{,}3178 & 7{,}7259 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}9 \end{bmatrix} \cdot 10^3 .$$

Matricele de rigiditate ale straturilor în coordonate globale sunt

$$[\overline{C}]_{45^0} = \begin{bmatrix} 59{,}914 & 50{,}114 & 49{,}992 \\ 50{,}114 & 59{,}914 & 49{,}992 \\ 49{,}992 & 49{,}992 & 52{,}696 \end{bmatrix} \cdot 10^3 , \quad [\overline{C}]_{-45^0} = \begin{bmatrix} 59{,}914 & 50{,}114 & -49{,}992 \\ 50{,}114 & 59{,}914 & -49{,}992 \\ -49{,}992 & -49{,}992 & 52{,}696 \end{bmatrix} \cdot 10^3 ,$$

$$[\overline{C}]_{0^0} = \begin{bmatrix} 207{,}7 & 2{,}3178 & 0 \\ 2{,}3178 & 7{,}7259 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}9 \end{bmatrix} \cdot 10^3 .$$

Matricea de rigiditate (9.97) a stratificatului simetric este

$$[A]=0{,}2\cdot\left[\overline{C}\right]_{45^0}+0{,}2\cdot\left[\overline{C}\right]_{-45^0}+0{,}6\cdot\left[\overline{C}\right]_{0^0}=\begin{bmatrix}148{,}58 & 21{,}436 & 0\\ 21{,}436 & 28{,}601 & 0\\ 0 & 0 & 24{,}019\end{bmatrix}\cdot 10^3 .$$

Inversa ei este matricea de flexibilitate

$$[a]=[A]^{-1}=\begin{bmatrix}7{,}5462 & -5{,}6558 & 0\\ -5{,}6558 & 39{,}203 & 0\\ 0 & 0 & 41{,}634\end{bmatrix}\cdot 10^{-6}.$$

Deformațiile specifice (10.21) în sistemul global sunt

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=[a]\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0{,}0565\\ 1{,}0912\\ 0\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}\ p .$$

Tensiunile în fiecare strat (în MPa), în sistemul global sunt

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}_{45^0}=\left[\overline{C}\right]_{45^0}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}51{,}3025\\ 62{,}5502\\ 51{,}7300\end{Bmatrix}p ,\quad \begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}_{-45^0}=\left[\overline{C}\right]_{-45^0}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}51{,}3025\\ 62{,}5502\\ -51{,}7300\end{Bmatrix}p ,$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}_{0^0}=\left[\overline{C}\right]_{0^0}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-9{,}2017\\ 8{,}2999\\ 0\end{Bmatrix}p .$$

Tensiunile în sistemul local al fiecărui strat (10.24) sunt

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{45^0}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1\\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}51{,}3025\\ 62{,}5502\\ 51{,}7300\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}108{,}6564\\ 5{,}1964\\ 5{,}6238\end{Bmatrix}p ,$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{-45^0}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & -1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1\\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}51{,}3025\\ 62{,}5502\\ -51{,}7300\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}108{,}6564\\ 5{,}1964\\ -5{,}6238\end{Bmatrix}p ,$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{0^0}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-9{,}2017\\ 8{,}2999\\ 0\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}-9{,}2017\\ 8{,}2999\\ 0\end{Bmatrix}p .$$

Din criteriul Tsai-Hill (10.25) se obține, $p_{45^0}=p_{-45^0}=4{,}1047$, $p_{0^0}=3{,}3714\,\text{MPa}$, deci presiunea care poate produce fisurarea vasului este

$$p=3{,}37\,\text{MPa}.$$

11.
SOLICITĂRI COMBINATE

În capitolele 5, 6 şi 8 s-au studiat cele patru solicitări simple: întinderea (compresiunea), forfecarea, încovoierea şi răsucirea. În practică, adesea, acestea apar împreună, producând *solicitări combinate* sau *solicitări compuse*.

Dacă în secțiunea barei acționează eforturi care produc tensiuni de același fel, acestea se compun algebric, deci problema se rezolvă aplicând principiul suprapunerii efectelor. Astfel, la întindere şi încovoiere se produc tensiuni normale, în timp ce la forfecare şi răsucire se produc tensiuni tangențiale.

Când în secțiunea barei acționează eforturi care produc simultan tensiuni normale şi tensiuni tangențiale, de exemplu în cazul solicitărilor la încovoiere şi răsucire, sau întindere şi răsucire, pentru rezolvarea problemei se utilizează teoriile de rezistență.

11.1 Întinderea excentrică

Se consideră bara din figura 11.1, solicitată de forța F, paralelă cu axa barei, aplicată în punctul $B(y_0, z_0)$.

Pentru a stabili valorile eforturilor care acționează într-o secțiune oarecare, se reduce forța în centrul de greutate al secțiunii transversale, rezultând o forță axială $N = F$ şi un moment încovoietor $M_i = F\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$, a cărui direcție nu corespunde cu axele centrale principale ale secțiunii. Pentru simplificarea calculelor este utilă descompunerea acestui moment în două componente orientate în lungul axelor: $M_z = -F y_0$ şi $M_y = F z_0$ (față negativă).

Într-un punct $C(y, z)$ din cadranul I $(y > 0, z > 0)$, tensiunile normale produse de cele trei eforturi N, M_z şi M_y sunt pozitive şi se însumează algebric. Tensiunea totală are expresia

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y\, z}{I_y} - \frac{M_z\, y}{I_z} = \frac{F}{A} + \frac{F\, z_0\, z}{I_y} + \frac{F\, y_0\, y}{I_z}$$

sau

$$\sigma_x = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{z_0\, z}{i_y^2} + \frac{y_0\, y}{i_z^2}\right), \tag{11.1}$$

unde s-au înlocuit razele de inerție

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{11.2}$$

Axa neutră, definită ca locul geometric al punctelor în care $\sigma_x = 0$, are ecuația

$$1 + \frac{z_0\, z}{i_y^2} + \frac{y_0\, y}{i_z^2} = 0, \tag{11.3}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{z}{-\frac{i_y^2}{z_0}} + \frac{y}{-\frac{i_z^2}{y_0}} = 1. \tag{11.4}$$

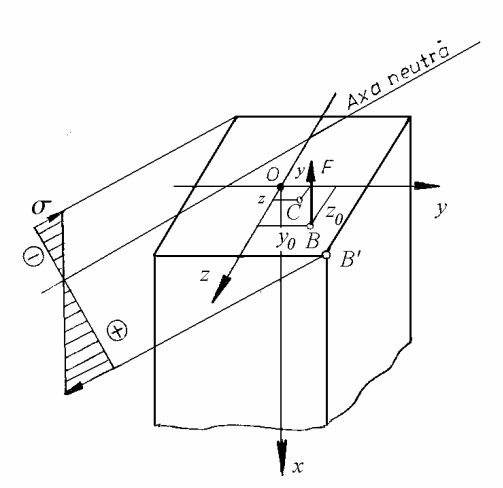


Fig. 11.1

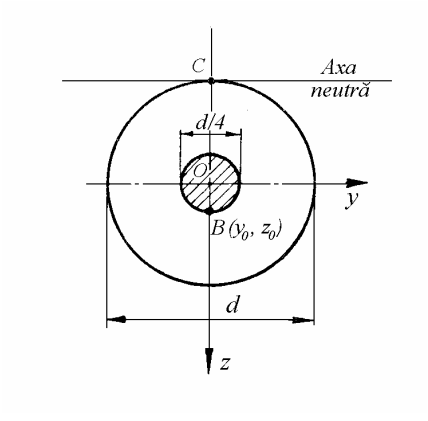


Fig. 11.2

Cunoscând poziția axei neutre, se duc tangentele la conturul secțiunii paralele cu axa neutră, obținând punctele în care tensiunea normală totală σ_x are

valori extreme. Înlocuind coordonatele acestor puncte în expresia (11.1) se calculează σ_{max} şi σ_{min} şi se poate construi diagrama tensiunilor (v. fig. 11.1).

Exemplul 11.1

Să se determine locul geometric al punctelor de aplicație a unei forțe excentrice, paralele cu axa barei, pentru care axa neutră corespunzătoare este tangentă la conturul secțiunii circulare (fig. 11.2).

Rezolvare

Fie ecuația tangentei în *C* la cercul de diametru *d* (fig. 11.2) $z = -\dfrac{d}{2}$ care prin identificare cu ecuația generală a axei neutre (11.2) duce la determinarea coordonatelor punctului *B* de aplicație a forței:

$$y_0 = 0\,, \qquad z_0 = -\frac{i_y^2}{z} = -\frac{\dfrac{d^2}{16}}{-\dfrac{d}{2}} = \frac{d}{8}\,.$$

Când axa neutră ocupă poziția altor tangente la cerc, punctul *B* parcurge un cerc de rază $d/8$, numit "sâmbure central" (J. A. Ch. Bresse, 1859). Când forța *F* este aplicată pe conturul sau în interiorul sâmburelui central, axa neutră este tangentă sau nu intersectează secțiunea, deci tensiunile au acelaşi semn pe toată suprafața.

Exemplul 11.2

Dacă bara din figura 11.1 are secțiunea pătrată cu latura *a*, să se calculeze tensiunea normală maximă din bară când forța *F* este aplicată în punctul $B'\left(a/2\,,\ a/2\right)$.

Rezolvare

În acest caz $y_0 = z_0 = \dfrac{a}{2}$, $i_y^2 = i_z^2 = \dfrac{a^2}{12}$ şi din relația (11.1) se obține, în punctul B',

$$\sigma_{max} = \frac{7F}{a^2}\,.$$

Exemplul 11.3

Să se dimensioneze grinda din figura 11.3, *a*, asupra căreia acționează forța axială $F = 36\,kN$. Grinda este din lemn cu $\sigma_a = 10$ N/mm^2 şi are secțiunea dreptunghiulară $a \times 2a$.

Rezolvare

Secțiunea periculoasă $A-A$, de formă pătrată $a\times a$ (fig. 11.3, *a*), este solicitată la întindere excentrică. Dacă se reduce forța *F* în centrul de greutate *C* al secțiunii slăbite, se obține torsorul format din forța axială *F*, care produce întindere, şi cuplul, de moment $M_y = F\dfrac{a}{2}$, care produce încovoiere.

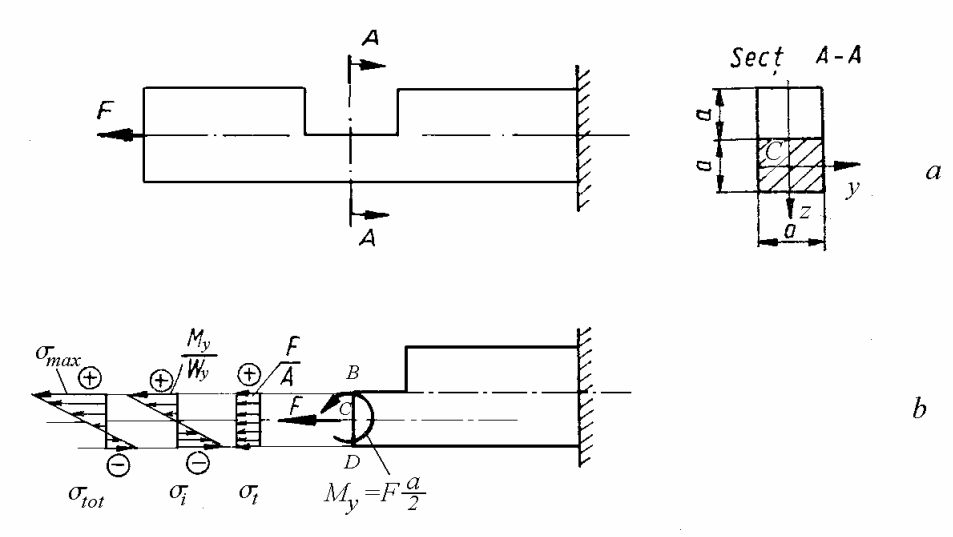


Fig. 11.3

Tensiunea normală este maximă în punctul *B* al secțiunii (fig. 11.3, *b*) şi are expresia

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F}{a^2} + \frac{F\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a^2}{6}} = \frac{4F}{a^2}.$$

Egalând σ_{max} cu σ_a se poate face dimensionarea barei

$$\sigma_a = \frac{4F}{a^2}, \text{ de unde } a = \sqrt{\frac{4F}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{4\cdot 36\cdot 10^3}{10}} = 120\,\text{mm}.$$

Exemplul 11.4

Să se verifice cârligul din figura 11.4 *a*, considerat bară cu rază mare de curbură, asupra căruia acționează forța $F = 2\,\text{kN}$. Cârligul este din oțel cu $\sigma_a = 120\,\text{MPa}$ şi are secțiunea circulară cu diametrul $d = 20\,\text{mm}$.

Rezolvare

Secțiunea *AB* a cârligului este solicitată la întindere excentrică. Se reduce forța *F* în centrul de greutate *C* al secțiunii, la torsorul format din forța axială *F*, care produce întindere, şi cuplul de moment $M_y = Fe$ care produce încovoiere.

Tensiunea normală este maximă în punctul *A* al secțiunii (fig. 11.4, *b*). Considerând valabile formulele de la bare drepte, se obține expresia

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Fe}{\frac{\pi d^3}{32}}.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot 2000}{\pi} + \frac{32 \cdot 2000 \cdot 4}{\pi \cdot 20^3} = 108{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

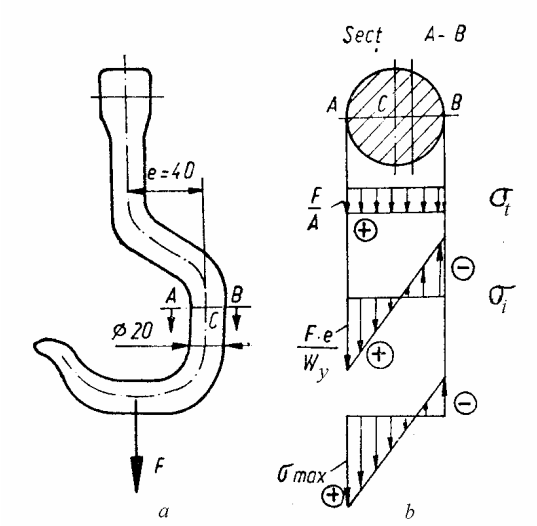


Fig. 11.4

Exemplul 11.5

Se cere să se calculeze tensiunea maximă într-un cârlig de macara (fig. 11.5, *a*), destinat să ridice greutăți $F = 30\,kN$. Secțiunea *BB* este trapezoidală cu colțurile rotunjite. (fig. 11.5, *b*). Într-un calcul aproximativ acesta se poate aproxima cu trapezul isoscel din fig. 11.5, *c*.

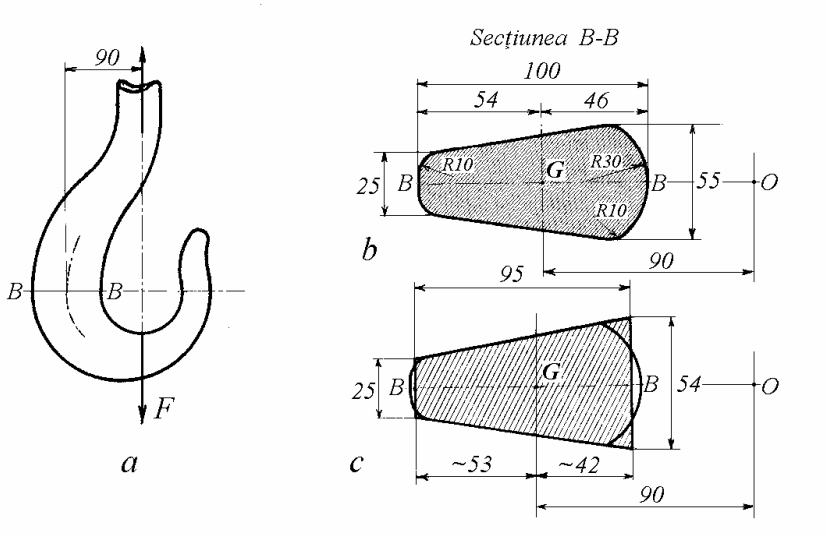


Fig. 11.5

Rezolvare

Cu notațiile din *Anexa 5*, dimensiunile secțiunii trapezoidale sunt

$$b_1 = 54\,\text{mm}\,,\ b_2 = 25\,\text{mm}\,,\ h = 95\,\text{mm}\,,$$

iar razele

$$R = 90\,\text{mm}\,,\ R_1 = 48{,}31\,\text{mm}\,, R_2 = 143{,}31\,\text{mm}\,.$$

Distanța de la centrul de greutate la fibra interioară este dată de

$$e_1 = \frac{h}{3}\,\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} = \frac{95}{3}\,\frac{54 + 2\cdot 25}{54 + 25} = 41{,}69\,\text{mm}\,.$$

Aria secțiunii transversale este $A = 3752{,}5mm^2$.

Utilizând formula din *Anexa 5* se calculează raza de curbură a suprafeței în care tensiunile de încovoiere sunt nule

$$r = \frac{A}{\dfrac{b_1R_2 - b_2R_1}{h}\ln\dfrac{R_2}{R_1} - \left(b_1 - b_2\right)} = \frac{3752{,}5}{\dfrac{54\cdot 143{,}31 - 25\cdot 48{,}31}{95}\ln\dfrac{143{,}31}{48{,}31} - 29} = 82\,\text{mm}\,.$$

Excentricitatea este $e = R - r = 8\,\text{mm}$ iar distanțele la fibrele extreme sunt $d_1 = r - R_1 = 33{,}7\,\text{mm}$ şi $d_2 = R_2 - r = 61{,}3\,\text{mm}$.

Tensiunea maximă de încovoiere este

$$\left|\sigma_{max}\right| = \frac{F\,R}{A\,e}\,\frac{d_1}{R_1} = \frac{30\cdot 10^3\cdot 90}{3{,}752\cdot 10^3\cdot 8}\,\frac{33{,}7}{48{,}31} = 62{,}7\,\frac{N}{\text{mm}^2}\,.$$

Tensiunea produsă de întindere este

$$\sigma_t = \frac{F}{A} = \frac{3 \cdot 10^4}{3752,5} = 8 \frac{N}{\text{mm}^2} .$$

Tensiunea normală totală maximă este

$$\sigma = 62,7 + 8 = 70,7 \, \text{N} / \text{mm}^2 .$$

Exemplul 11.6

Se cere să se calculeze tensiunea maximă în ochiul tirantului din figura 11.6, la care raza centrului de greutate este egală cu diametrul secțiunii circulare.

Rezolvare

Raza fibrei neutre (8.113) este

$$r = \frac{1}{4}\left(2R + \sqrt{4R^2 - d^2}\right) = \frac{1}{4}\left(2d + \sqrt{4d^2 - d^2}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} d .$$

Excentricitatea este

$$e = R - r = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} d = 0,067 \, d .$$

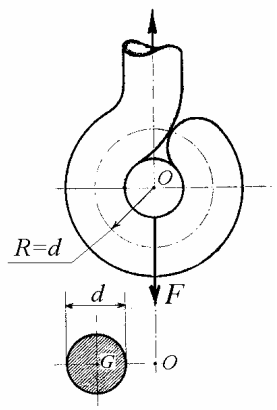


Fig. 11.6

Distanța la fibra interioară este

$$d_1 = r - R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} d .$$

Tensiunea maximă se calculează cu formula (8.114)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\,e}\frac{d_1}{R_1} = \frac{F}{A} + \frac{F\,d}{A \cdot 0{,}067 d}\frac{0{,}433\,d}{0{,}5\,d} = 13{,}92\frac{F}{A}.$$

11.2 Bare solicitate la încovoiere şi răsucire

Arborii de secțiune circulară sau inelară, solicitați prin moment încovoietor şi moment de răsucire, se calculează utilizând teoriile de rezistență. Astfel, relația teoriei a III-a de rezistență (10.19) se scrie:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2}. \qquad (11.5)$$

Deoarece la secțiuni axial-simetrice între modulele de rezistență se stabileşte relația

$$W_p = 2W_y, \qquad (11.6)$$

expresia (11.5) se scrie

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_y} = \frac{M_{ie\,\mathrm{III}}}{W_y}. \qquad (11.7)$$

unde $M_{ie\,\mathrm{III}}$ este *momentul încovoietor echivalent*.

Pentru bare din oțel, conform celor cinci teorii clasice de rezistență, momentul încovoietor echivalent are expresia

$$\begin{aligned}
M_{ie\,\mathrm{I}} &= 0{,}5\,M_i + 0{,}5\sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{II}} &= 0{,}35\,M_i + 0{,}65\sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{III}} &= \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,, \qquad (11.8)\\
M_{ie\,\mathrm{IV\,a}} &= \sqrt{M_i^2 + 0{,}65\,M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{IV\,b}} &= \sqrt{M_i^2 + 0{,}75\,M_t^2}\,.
\end{aligned}$$

Utilizând una din relațiile (11.8), efectele încovoierii şi răsucirii sunt cumulate într-o singură mărime, momentul încovoietor echivalent, cu care se face un calcul la încovoiere. Astfel, formula de dimensionare (8.14, *a*) devine

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a}, \tag{11.9}$$

deci problema de solicitare combinată se transformă într-o problemă de solicitare la încovoiere, neglijând efectul forței tăietoare.

Exemplul 11.7

Să se dimensioneze bara cotită plană din figura 11.7, solicitată de o forță perpendiculară pe planul barei, din oțel de secțiune circulară cu $\sigma_a = 80$ MPa.

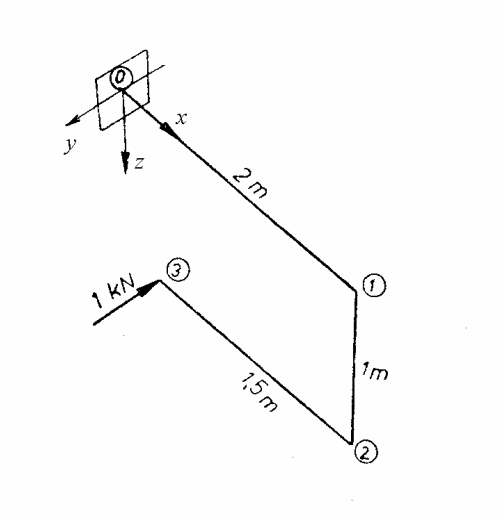


Fig. 11.7

Rezolvare

Pentru bara *2-3*, în secțiunea *2*,

$$M_{i_2} = 1{,}5 \text{ kNm}$$

Bara *2-1* este solicitată la încovoiere şi răsucire. În secțiunea *1*

$$M_{i_1} = 1 \text{ kNm}, \qquad M_{t_1} = 1{,}5 \text{ kNm},$$

deci, pe baza teoriei a III-a de rezistență,

$$M_{ie_1} = \sqrt{M_{i\,1}^2 + M_{t\,1}^2} = \sqrt{3{,}25} = 1{,}8 \text{ kNm}.$$

Bara *1-0* este solicitată la încovoiere şi răsucire. În secțiunea *1*

$$M_{i_1} = 1{,}5 \text{ kNm}, M_{t_1} = 1 \text{ kNm}, \quad M_{ie_1} = 1{,}8 \text{ kNm},$$

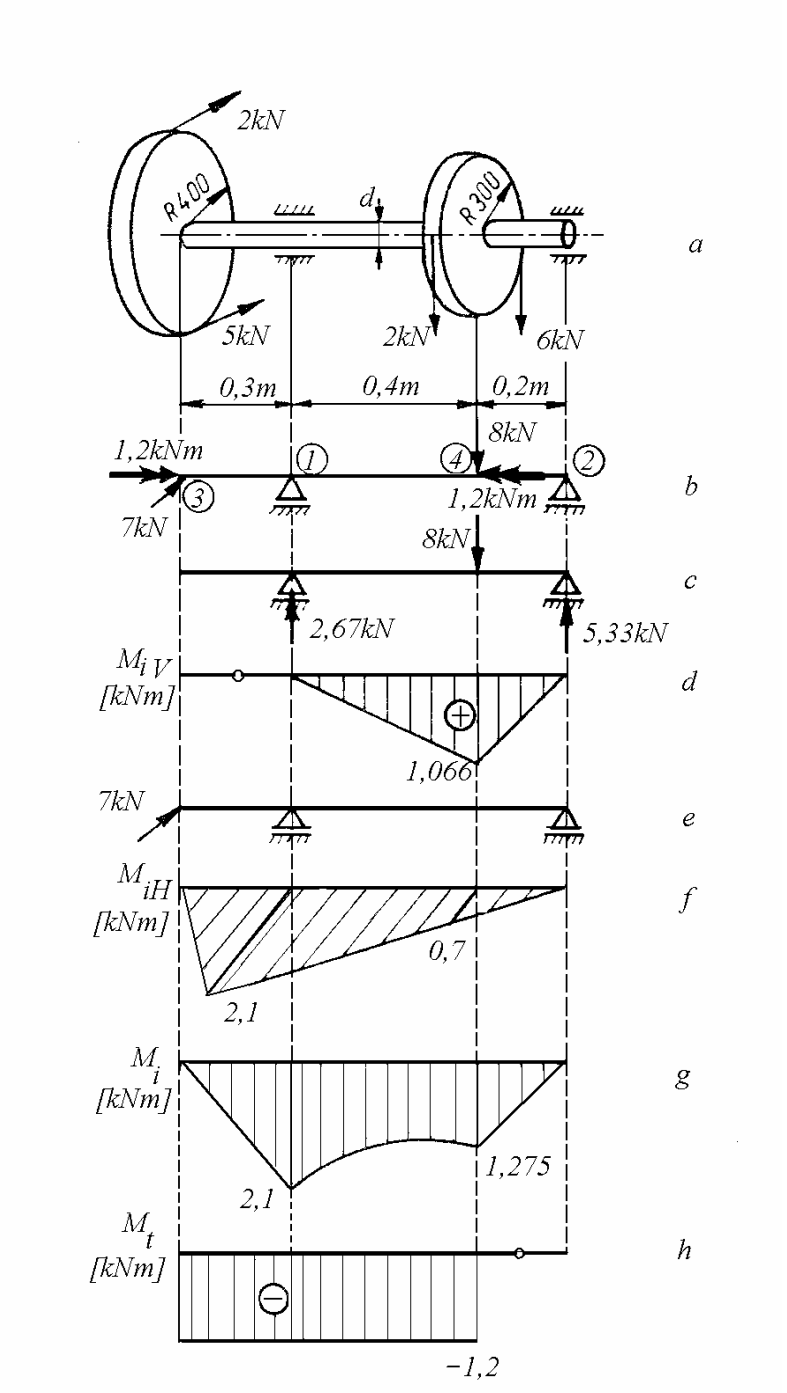

2kN
R400
d
R300
a
5kN
2kN
6kN
0,3m
0,4m
0,2m
8kN
1,2kNm
1
4
2
b
3
7kN
1,2kNm
8kN
c
2,67kN
5,33kN
M_i V
[kNm]
d
1,066
7kN
e
M_{iH}
[kNm]
f
0,7
2,1
M_i
[kNm]
g
1,275
2,1
M_t
[kNm]
h
−1,2

Fig. 11.8

iar în secțiunea *0,*

$$M_{i_0} = 0{,}5\,\text{kNm}\,,\quad M_{t_0} = 1\,\text{kNm}\,,\quad M_{ie_0} = 1{,}1\,\text{kNm}\,.$$

Rezultă că "secțiunea periculoasă" este în *1* :

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie1}}{\sigma_a} = \frac{1{,}8\cdot 10^6}{80} = 22{,}5\cdot 10^3\,\text{mm}^3 \cong 0{,}1d^3\,,$$

deci se alege $d = 60\,\text{mm}$.

Exemplul 11.8

Să se dimensioneze arborele din figura 11.8, *a* din oțel, cu $\sigma_a = 80\,\text{MPa}$, de secțiune circulară.

Rezolvare

Reducând în centrul de greutate al secțiunii transversale a arborelui forțele care acționează asupra roților (fig. 11.8, *b*), rezultă că bara este solicitată la răsucire şi încovoiere (se neglijează forfecarea).

Pentru bara solicitată de forța verticală (fig. 11.8, *c*) se construieşte diagrama momentelor încovoietoare M_{i_V} (fig. 11.8, *d*). Pentru bara solicitată numai de forța orizontală (fig. 11.8, *e*) se construieşte diagrama momentelor încovoietoare M_{i_H} (fig. 11.8, *f*). Compunând geometric (vectorial) cele două diagrame, se rabate fiecare moment rezultant în planul figurii obținându-se diagrama momentelor încovoietoare M_i (fig. 11.8, *g*).

Se construieşte diagrama momentelor de răsucire M_t (fig. 11.8, *h*). Secțiunea periculoasă este în dreptul reazemului *1*, momentul încovoietor echivalent fiind

$$M_{ie\,\text{III}} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{2{,}1^2 + 1{,}2^2} = 2{,}418\,\text{kNm}\,.$$

Rezultă

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie\,\text{III}}}{\sigma_a} = \frac{2{,}418\cdot 10^6}{80} = 30{,}2\cdot 10^3\,\text{mm}^3 \cong 0{,}1d^3$$

deci diametrul arborelui este

$$d = 67\,\text{mm}\,.$$

11.3 Bare solicitate la întindere şi răsucire

În cazul barelor solicitate la întindere (compresiune) şi răsucire, se utilizează relațiile (10.19). Se face o predimensionare a barei la răsucire, apoi se verifică la solicitarea combinată punând condiția ca $\sigma_{ech} \le \sigma_a$.

Exemplul 11.9

Să se dimensioneze tronsonul *2-3* al barei din figura 2.18 din oțel, cu $\sigma_a = 90\,\text{MPa}$, de secțiune circulară. Să se verifice apoi tronsonul *2-3*, considerând că are aceeaşi secțiune ca tronsonul *1-2*.

Rezolvare

Se trasează diagramele de eforturi ca în figura 2.18.

Tronsonul 1-2 este solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secțiunea periculoasă în *1*. Secțiunea barei fiind circulară, se calculează momentul încovoietor rezultant

$$M_{i_1} = \sqrt{M_{z_1}^2 + M_{y_1}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47\ \text{kNm}.$$

Momentul încovoietor echivalent, conform teoriei a III-a de rezistență, este

$$M_{ie\,1} = \sqrt{M_{i_1}^2 + M_{t_1}^2} = \sqrt{4{,}47^2 + 1{,}6^2} = 4{,}75\ \text{kNm}.$$

Se dimensionează tronsonul *1-2* utilizând formula (11.9): $W_{y_{nec}} = \dfrac{M_{ie_1}}{\sigma_a}$,

adică

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{4{,}75 \cdot 10^6}{90}, \qquad d = 81{,}3\ \text{mm}.$$

Se alege $d = 82\ \text{mm}$.

Tronsonul 2-3 se verifică la solicitarea de întindere cu încovoiere, în secțiunea periculoasă *2*

$$\sigma_{ef_2} = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_{ax}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 82^2} + \frac{32 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6}{\pi \cdot 82^3} = 30{,}3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a.$$

Exemplul 11.10

La bara din figura 2.19, *a* se cunosc $F = 10\,\text{kN}$ şi $a = 1\,\text{m}$. Dacă $\sigma_a = 90\,\text{MPa}$, se cere să se verifice bara ştiind că tronsonul *1-2* are secțiunea

transversală dreptunghiulară, cu $b = 100\,\text{mm}$ şi $h = 150\,\text{mm}$, iar tronsoanele *2-3* şi *3-4* au secţiuni transversale circulare, ambele cu $d = 140\,\text{mm}$.

Rezolvare

Se trasează diagramele de eforturi ca în figura 2.19.

Tronsonul 1-2 este solicitat la întindere şi încovoiere oblică, secţiunea transversală fiind dreptunghiulară. Eforturile N, M_y şi M_z sunt constante de-a lungul tronsonului. Se calculează σ_{ef} şi se compară cu σ_a:

$$\sigma_{ef\,1-2} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F}{b\,h} + \frac{F\,a}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{F\,a}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Înlocuind cu valori numerice, rezultă

$$\sigma_{ef\,1-2} = \frac{10^4}{100 \cdot 150} + \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{100 \cdot 150^2} + \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{100 \cdot 150^2} = 67{,}3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

Tronsonul 2-3 este solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secţiunea periculoasă în *3*. Se calculează σ_3 şi τ_3 şi se combină conform teoriei a III-a de rezistenţă

$$\sigma_3 = \frac{M_{i_3}}{W_{ax}} = \frac{2aF}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{\pi \cdot 140^3} = 74{,}3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\tau_3 = \frac{M_{t_3}}{W_p} = \frac{aF}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{\pi \cdot 140^3} = 18{,}6\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{ech\,3} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau_3^2} = \sqrt{74{,}3^2 + 4 \cdot 18{,}6^2} = 83\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

Tronsonul 3-4 este de asemenea solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secţiunea periculoasă în *3*. Se procedează analog

$$\sigma_3 = \frac{M_{i_3}}{W_{ax}} = \frac{aF}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{\pi \cdot 140^3} = 37{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\tau_3 = \frac{M_{t_3}}{W_p} = \frac{2aF}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{\pi \cdot 140^3} = 37{,}1\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{ech\,3} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau_3^2} = \sqrt{37{,}1^2 + 4 \cdot 37{,}1^2} = 83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

Exemplul 11.11

Un arbore din oțel cu $\sigma_c = 200$ MPa şi diametrul $d = 50$ mm este solicitat de un moment încovoietor $M_i = 1{,}9$ kNm. Se cere valoarea maximă a momentului de răsucire care mai poate fi suportat de arbore conform: a) criteriului de curgere Tresca; b) criteriului de curgere von Mises.

Rezolvare

Modulul de rezistență axial este

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 50^3}{32} = 12{,}27 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Momentul încovoietor echivalent este

$$M_{ie} = \sigma_c W_y = 200 \cdot 12{,}27 \cdot 10^3 = 2{,}454 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2{,}454 \text{ kNm} .$$

Conform criteriului Tresca, momentul de răsucire maxim este

$$M_{t1} = \sqrt{M_{ie}^2 - M_i^2} = \sqrt{2.454^2 - 1{,}9^2} = 1{,}55 \text{ kNm} .$$

Conform criteriului von Mises, momentul de răsucire maxim este

$$M_{t2} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(M_{ie}^2 - M_i^2\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(2.454^2 - 1{,}9^2\right)} = 1{,}79 \text{ kNm} .$$

11.4 Tensiuni termice în bare curbe

În general, în secțiunea transversală a unei bare curbe, pe lângă momentul încovoietor acționează şi o forță axială, deci apare o solicitare combinată. Deşi forța axială este aplicată în centrul de greutate al secțiunii transversale, formulele de calcul se simplifică atunci când originea axelor se alege în dreptul fibrei neutre de la solicitarea de încovoiere pură. Acțiunea simultană a tensiunilor produse de întindere deplasează axa neutră față de poziția determinată la încovoiere pură. În continuare, pentru simplificarea calculelor, tensiunile termice produse de încălzirea neuniformă se calculează față de axa neutră de la încovoierea pură. Se adoptă ipotezele de la studiul încovoierii pure (§ 8.8) considerând în plus acțiunea simultană a forței axiale şi a câmpului de temperaturi.

Fie un element de bară curbă (fig. 8.33, *a*), delimitat de două secțiuni plane (între care există unghiul $\mathrm{d}\varphi$) şi solicitat la încovoiere de un moment M', de o forță axială N' şi încălzit într-un câmp de temperaturi cu o variație $T(z)$

Alungirea specifică a fibrei *mn* situate la distanța *z* de fibra *ab*, este

$$\varepsilon_s = \frac{z\,\Delta d\varphi + du_0}{(r+z)d\varphi} - \alpha T\,, \tag{11.10}$$

unde alungirea du_0 se datoreşte forței axiale iar α este coeficientul de dilatare termică liniară a materialului barei.

Utilizând legea lui Hooke, se obține expresia tensiunii normale

$$\sigma = \frac{z}{r+z} E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} + \frac{r}{r+z} E \frac{du_0}{ds_0} - E\alpha T\,, \tag{11.11}$$

unde $ab = ds_0 = r\,d\varphi$.

Condițiile de echilibru se scriu

$$N' = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A\,, \quad M' = \int_A z\sigma\,\mathrm{d}A\,. \tag{11.12}$$

Înlocuind (11.11) în (11.12) şi punând condiția (8.108)

$$\int_A \frac{z}{r+z}\mathrm{d}A = 0\,, \tag{11.13}$$

care defineşte poziția axei *Oy,* deci axa față de care se măsoară ordonatele *z,* se obține

$$N' = E\frac{du_0}{ds_0}\int_A \frac{r}{r+z}\mathrm{d}A - E\alpha\int_A T\,\mathrm{d}A\,, \tag{11.14}$$

$$M' = \frac{E\,\Delta\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \frac{z^2}{r+z}\mathrm{d}A - E\alpha\int_A Tz\mathrm{d}A\,. \tag{11.15}$$

Deoarece

$$\int_A \frac{r}{r+z}\mathrm{d}A = A\,, \qquad \int_A \frac{z^2}{r+z}\mathrm{d}A = Ae$$

din relațiile (11.14) şi (11.15) se obțin constantele

$$\frac{E\,\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s_0} = \frac{N' + N'_T}{A}\,, \quad \frac{E\,\Delta\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{M' + M'_T}{Ae}\,, \tag{11.16}$$

unde

$$N'_T = E\alpha \int_A T \, \mathrm{d}A \,, \qquad M'_T = E\alpha \int_A T z \, \mathrm{d}A \,. \tag{11.17}$$

Înlocuind constantele (11.16) în expresia (11.11) rezultă formula tensiunilor normale

$$\sigma = \frac{z}{r+z}\frac{M' + M'_T}{Ae} + \frac{r}{r+z}\frac{N' + N'_T}{A} - E\alpha T \,,$$

sau

$$\sigma = E\left[\frac{r}{r+z}\left(z\,\frac{M' + M'_T}{r\,E\,Ae} + \frac{N' + N'_T}{E\,A}\right) - \alpha T\right]. \tag{11.18}$$

De remarcat faptul că indicele ‘prim’ din formula (11.18) arată că ordonata z se măsoară față de fibra neutră de la încovoierea pură şi deci distribuția de temperaturi utilizată la calculul ‘eforturilor termice’ (11.17) se calculează corespunzător.

Pentru $T = 0$, relația (11.18) devine

$$\sigma = \frac{r\,z}{r+z}\frac{M'}{I'_y} + \frac{r}{r+z}\frac{N'}{A'}, \tag{11.19}$$

unde proprietățile geometrice reduse sunt

$$I'_y = \int_A \frac{r\,z^2}{r+z}\,\mathrm{d}A = \int_A \frac{r}{r_1} z^2 \,\mathrm{d}A = r\,A\,e \,, \quad A' = \int_A \frac{r}{r_1}\,\mathrm{d}A = A \,.$$

Tensiunile normale produse de întindere sau compresiune sunt de fapt constante pe înălțimea secțiunii barei. Al doilea termen din membrul drept al expresiei (11.19) apare datorită faptului că forța N' definită de prima relație (11.12) nu este aplicată în centrul de greutate.

Dacă forța axială N este aplicată în G, atunci redusă în fibra neutră de la încovoierea pură aceasta mai produce un moment $M = N\,e$ şi din (11.19) rezultă

$$\sigma = \frac{z}{r+z}\frac{N\,e}{Ae} + \frac{r}{r+z}\frac{N}{A} = \frac{N}{A} = const.$$

Dacă ordonatele z se calculează față de axa care trece prin centrul de greutate al secțiunii, formula tensiunilor produse la încovoierea pură conține doi termeni, ca în formularea originală a lui Winkler.

Exemplul 11.12

Se cer tensiunile termice în bara în consolă, de secțiune dreptunghiulară, din fig. 11.9, *a*, supusă unei variații de temperatură $T(z)=T_0\left(\frac{3}{4}-\frac{z}{h}-\frac{z^2}{h^2}\right)$.

Rezolvare

Calculul tensiunilor termice produse de încălzirea neuniformă se poate reduce la o problemă de solicitări combinate, utilizând metoda blocării (J. M. C. Duhamel, 1838).

Se presupune că deplasările punctelor barei sunt total blocate. Dilatarea împiedicată produce alungiri specifice

$$\varepsilon_0=-\alpha T\,,$$

deci starea blocată este echivalentă cu o pretensionare cu tensiuni de compresiune longitudinale (fig. 11.9, *b*)

$$\sigma_0=-\alpha E T\,.$$

Bara fiind liberă la capătul din dreapta, pentru a suprima blocarea trebuie aplicate tensiuni egale şi de sens contrar. Acestea sunt echivalente cu o forță axială şi un moment încovoietor aplicate la capete, definite de relațiile de echivalență

$$N_T=\int_{-h/2}^{h/2}\alpha E T(z)\,b\,\mathrm{d}z\,,\qquad M_T=\int_{-h/2}^{h/2}\alpha E T(z)\,z\,b\,\mathrm{d}z\,.$$

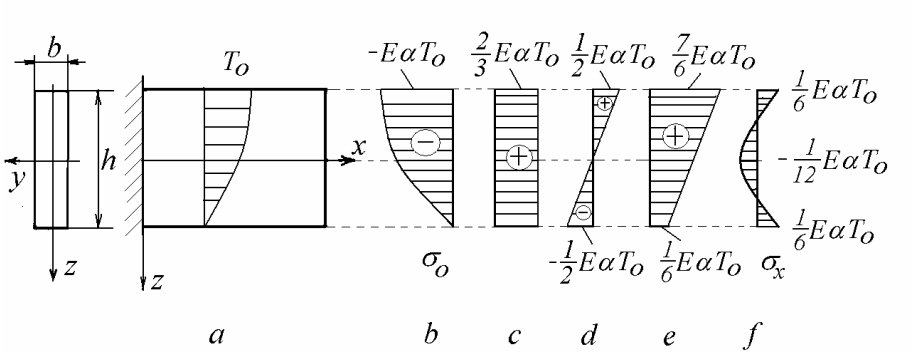


Fig. 11.9

La o distanță oarecare de capăt, forța axială N_T produce tensiuni de întindere uniform distribuite (fig. 11.9, *c*)

$$\sigma' = \frac{N_T}{A} = \frac{\alpha E}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\alpha E T_0 .$$

Momentul încovoietor M_T produce tensiuni normale distribuite liniar (fig. 11.9, *d*)

$$\sigma'' = \frac{M_T z}{I_y} = \alpha E b \frac{z}{I_y} \int_{-h/2}^{h/2} T(z)\, z\,\mathrm{d}z = -\alpha E T_0 \frac{z}{h} .$$

Diagrama tensiunilor de deblocare (fig. 11.9, *e*) se obține însumând diagramele tensiunilor produse de întindere şi încovoiere.

Distribuția finală a tensiunilor termice se obține însumând tensiunile de blocare şi cele de deblocare (fig. 11.9, *f*)

$$\sigma_x = \alpha E \left[-T_0 \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} \right) + \frac{2T_0}{3} - T_0 \frac{z}{h} \right] = -\alpha E \frac{T_0}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{4z^2}{h^2} \right).$$

Este interesant de notat că o distribuție de temperaturi $T(z) = T_0 \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^2$ produce tensiuni termice egale şi de semn contrar.

Bibliografie

1. Alexander, J., and Gunasekera, J. S., *Strength of Materials, Advanced Theory and Applications*, vol.2, Ellis Horwood Ltd., New York, 1991.
2. Atanackovic, T. M. and Guran, A*., Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 2000.
3. Bannantine, J. A., Comer, J. J., and Handrock, J. L*., Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1990.
4. Bedford, A. and Liechti, K. M., *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.
5. Beer, F. P., Johnston, E. R. Jr., and De Wolf, J. T., *Mechanics of Materials*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
6. Benham, P. P., Crawford, R. J. and Armstrong, C. G., *Mechanics of Engineering Materials,* 2nd edition, Longman, 1996.
7. Boley, B. A. and Weiner, J. H., *Theory of Thermal Stresses*, Wiley, New York, 1960.
8. Boresi, A. P., and Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 2000.
9. Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M., *Advanced Mechanics of Materials*, 5th ed., John Wiley, New York, 1993.
10. Böge, A., *Technische Mechanik*, 26. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2003.
11. Brommundt, E. and Sachs, G., *Technische Mechanik. Eine Einführung*, 3. Auflage, Oldenbourg, München, 1998.
12. Budynas, R. C., *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill International Editions, 1999.
13. Buzdugan, Gh., *Rezistenţa materialelor*, ed. a XI-a, Editura tehnică, Bucureşti, 1980.
14. Case, J., Chilver, L., and Ross C. T. F., *Strength of Materials and Structures*, 4th ed., Arnold, London, 1999.
15. Craig, R. R. Jr., *Mechanics of Materials*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1999.
16. Crandall S. H., and Dahl, N. C., eds., *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1959.

17. Dowling, N. E., *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.

18. Duggan, T. V., *Stress Analysis and Vibrations of Elastic Bodies*, Temple Press Books Ltd., London, 1964.

19. Edwards, K. S. and McKee R. B., *Fundamentals of Mechanical Component Design*, McGraw-Hill, New York, 1991.

20. Felbeck, D. K. and Atkins, A. G., *Strength and Fracture of Engineering Solids*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.

21. Feodosiev, V., *Strength of Materials*, Mir Publishers, Moscow, 1973.

22. Fielding, J. P., *Introduction to Aircraft Design*, Cambridge University Press, 1999.

23. Flügge, W., ed., *Handbook of Engineering Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

24. Frocht, M. M., *Photoelasticity*, vol.I, vol.II, John Wiley, New York, 1941, 1948.

25. Gatewood, B. E., *Thermal Stresses*, McGraw Hill, New York, 1957.

26. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P., *Mechanics of Materials*, 4th SI ed., Stanley Thornes Publ. Ltd, 1999.

27**.** Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., PW-Kent., Boston, 2001.

28. Gould, P. L., *Analysis of Shells and Plates*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.

29. Harwood, N., and Cummings, W. M., eds., *Thermoelastic Stress Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1991.

30. Hearn, E. J., *Mechanics of Materials*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.

31. Herr, H., *Technische Mechanik. Lehr- und Aufgabenbuch*, 6. Auflage, Verlag Europa - Lehrmittel, Nourney, 2002.

32. Hertzberg, R. W., *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 3rd ed., John Wiley, New York, 1989.

33. Hetényi, M., ed., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1987.

34. Hibbeler, R. C., *Mechanics of Materials*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.

35. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Co., Washington, D.C., 1975.

36. Juvinall, R. C., *Engineering Considerations of Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1967.

37. *** *Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design*, 9th ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, IL, 1989.

38. Massonnet, Ch., *Résistance des matériaux*, 2me éd., Dunod, Paris,1968.

39. Mayr, M., *Technische Mechanik*, 4. Auflage, Hansen, München, 2003.

40. Megson, T. H. G., *Structural and Stress Analysis*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

41. Megson, T. H. G., *Aircraft Structures for Engineering Students*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.

42. Middleton, D. H., ed., *Composite Materials in Aircraft Structures*, Longman Scientific and Technical, 1990.

43. Mott, R. L., *Applied Strength of Materials*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

44. Müller, W. H. und Ferber, F., *Technische Mechanik für Ingenieure*, Fachbuchverlag, Leipzig, 2003.

45. Neuber, H. P., *Kerbspannungslehre*, 2nd ed., Springer, New York, 1958.

46. Niu M. C.-Y., *Airframe Stress Analysis and Sizing*, Conmilit Press Ltd., Hong Kong, 1997.

47. Noda, N., Hetnarski, R. B. and Tanigawa, Y., *Thermal Stresses*, 2nd ed., Taylor & Francis, New York, 2003.

48. Peterson R. E., *Stress Concentration Factors*, John Wiley, New York, 1974.

49. Petre, A., *Proiectarea structurilor de aeronave şi astronave*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1999.

50. Pilkey, W. D., *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*, John Wiley, New York, 2002.

51. Pilkey, W. D., *Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*, John Wiley, New York, 1994.

52. Pilkey, W. D., *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1997.

53. Ponomariov, S. D. ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Editura tehnică, Bucureşti, 1963 (trad. din l. rusă).

54. Riley, W. F., Sturges, L. D. and Morris, D. H., *Mechanics of Materials*, 5th ed., John Wiley, New York, 1999.

55. Rivello, R. M., *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.

56. Rusu, O., *Rezistența materialelor*, Partea a III-a, Institutul Politehnic Bucureşti, 1986,

57. Schnell, W., Gross, D. and Hauger, W., *Technische Mechanik*, Band 2: *Elastostatik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, 2002.

58. Shigley, J. E. and Mischke, C. R., *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill Int. Edition, 2001.

59. Timoshenko, S. P., *Strength of Materials*, 3rd ed., Robert Krieger Pub. Co., Malabar, FL, 1984.

60. Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, Dover, New York, 1983.

61. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

62. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, London, 1961.

63. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1970.

64. Tsai, S. W. and Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic, Westport, CT, 1980.

65. Ugural, A. C. and Fenster, S. K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed., Prentice Hall PTR, London, 2003.

66. Vable, M., *Mechanics of Materials*, Oxford University Press, 2002.

67. Vallat, P., *Résistance des matériaux appliquée à l'aviation*, Ed. Librairie Polytechnique Bèranger, Paris, 1950.

68. Vautrin, A. and Verchery, G., *Analysis and Design of Composite Materials and Structures,* Part I, Pluralis, Paris, 1990.

69. Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill International, New York, 1989.

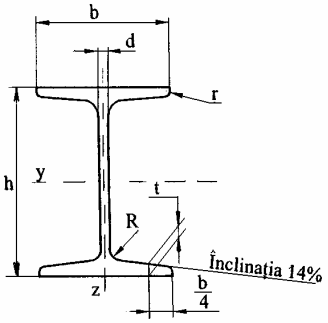
Rezistenţe admisibile

Anexa 1

Materialul		Caracteristici mecanice				Rezistenţe admisibile la tracţiune, σ_{at}, MPa pentru cazul de încărcare			Celelalte rezistenţe admisibile				Observaţii
		STAS	Rezistenţa la rupere σ_r MPa	Limita de curgere σ_c MPa	Alungire la rupere δ_5 %	I Solicitare statică	II Solicitare pulsantă	III Solicitare simetrică	Compresiune $\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{at}}$	Încovoiere $\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{at}}$	Răsucire $\frac{\tau_{ar}}{\sigma_{at}}$	Forfecare $\frac{\tau_{af}}{\sigma_{at}}$	
Oţel carbon	OL-37	SR EN 10020: 1993	370-450	210-240	26-25	120-140	110-130	70-100	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-42		420-500	230-260	22	130-160	110-140	80-110	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-50		500-620	270-290	19	150-180	125-160	90-120	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-70		min.700	340-360	10	210-250	160-200	110-150	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel carbon de calitate superioară	OLC 10[x)]	STAS 880-88	420	250	19	130-170	110-140	80-110	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	[x)] Călire şi revenire joasă [xx)] Îmbunătăţit
	OLC 25[xx)]		500	310	22	140-170	120-150	85-115	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OLC 45[xx)]		660	400	17	200-260	170-220	120-160	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel aliat	18MC10	STAS 791-88	880	735	10	300-380	230-320	150-220	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	33MaC11		880	690	12	300-380	230-280	180-230	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	13CN35		1130	930	10	380-460	280-380	190-260	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel carbon turnat în piese	OT40-2	SR EN 10020: 1993	400	200	24	100-130	80-110	50-75	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8	
	OT50-2		500	280	18	130-180	100-135	70-95	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8	
Fonte cu grafit lamelar	Fc 20	SR EN 1561: 1999	230[x)]	-	-	60-80	50-70	30-45	2,5	-	1,2	-	[x)] Pentru probe cu diametrul de 20mm, Piese cu crustă de turnare
	Fc 30		330[x)]	-	-	90-110	70-90	45-60	2,5	-	1,2	-	
Fonte cu grafit nodular	Fgn45-5	SR EN 1563: 1999	450	320	5	150-200	100-140	75-100	2,5	-	1,0-1,2[x)]	-	[x)] 1,1 la cazul III 1,2 La cazul II 1,3 la cazul I
	Fgn60-2		600	400	2	200-260	130-170	90-120	2,5	-	1,0-1,2[x)]	-	
Aliaje neferoase de turnare	Bz 12T	SR EN 575 1997	200	-	6	40-65	30-50	20-30	1	1	0,7	-	
	AmT 67		180	-	20	40-60	30-50	20-35	1	1	0,7		
	ATMg3Si		130	-	3	40-75	30-55	20-35	1	1,1-1,2	0,7	0,8	

Oţel I
(conform STAS 565-80)

Anexa 2a



h-înălţimea profilului
b-lăţimea tălpilor
d-grosimea inimii
t-grosimea medie a tălpilor
r-raza de rotunjire a tălpilor la vârf

I – momentul de inerţie
W – modulul de rezistenţă } raportate la axa de încovoiere respectivă
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – raza de inerţie

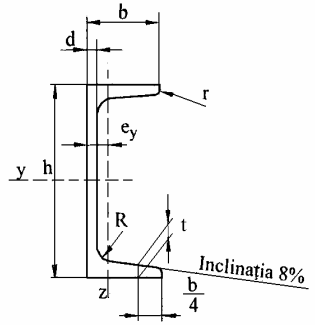
S-momentul static al semisecţiunii
R-raza de rotunjire interioară a tălpilor

Profil I	Dimensiuni					Aria secţiunii	Masa teoretică	Mărimi statice faţă de axele de încovoiere						S_y	Profil I
								y			z				
	h mm	b mm	t mm	d-R mm	r mm	A cm^2	μ kg/m	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	i_z cm	cm^3	
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114,0	2,90	638	36
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149,0	3,13	857	40

Oţel U

(conform STAS 564-80)

Anexa 2b

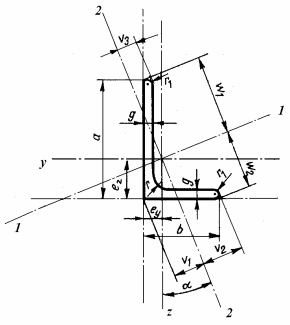


h-înălţimea profilului
b-lăţimea profilului
d-grosimea inimii
t- grosimea medie a tălpilor
R-raza de rotunjire interioara a tălpilor
r-raza de rotunjire a tălpilor la vârf

$$\left.\begin{array}{l} W - \text{modulul de rezistenţă} \\ i = \sqrt{\frac{I}{A}} - \text{raza de inerţie} \end{array}\right\} \text{raportate la axa de încovoiere respectivă}$$

S-momentul static al semisecţiunii
e_y-distanţa axei z de la marginea exterioară a inimii

Profil U	Dimensiuni						Aria secţiunii	Masa teoretică	Mărimi statice faţă de axele de încovoiere						S_y	e_y	Profil U
									y			z					
	h	b	d	t	R	r	A	μ	I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z			
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm	
6,5	65	42	5,5	7,5	7,5	4,0	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	-	1,42	6,5
8	80	45	6	8,0	8,0	4,0	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,5	8,5	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	9,0	9,0	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	10,0	10,0	5,0	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	11,0	11,0	5,5	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,5	11,5	6,0	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,5	12,5	6,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	13,0	13,0	6,5	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	14,0	14,0	7,0	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	16,0	16,0	8,0	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30



Oțel cornier cu aripi neegale

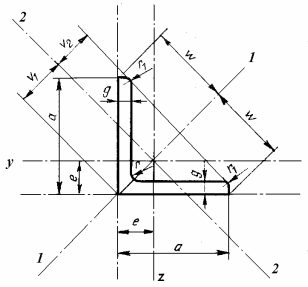
(conform STAS 425-80)

Anexa 2c

I – moment de inerție
W – modul de rezistență
} raportate la axa de încovoiere respectivă

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – rază de inerție

Denumirea LL	Dimensiunile secțiunii					Secțiunea A	Masa μ	Distanța axelor							Unghiul de înclinare a axelor tg α	Mărimile statice față de axele de încovoiere									
																y			z			1		2	
	a	b	g	r	r_1			e_z	e_y	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3		I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z	I_1	i_1	I_2	i_2
	mm					cm^2	kg/m	cm								cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm	cm^4	cm
30 x 20 x 3	30	20	3	3,5	2	1,43	1,12	0,90	0,50	2,05	1,51	0,86	1,04	0,56	0,427	1,25	0,62	0,93	0,44	0,29	0,55	1,43	1,00	0,26	0,42
x 4			4			1,86	1,46	1,03	0,54	2,02	1,52	0,91	1,04	0,58	0,427	1,59	0,81	0,92	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42
40 x 20 x 3	40	20	3	3,5	2	1,73	1,36	1,42	0,44	2,61	1,77	0,79	1,19	0,46	0,257	2,80	1,09	1,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,31	0,42
x 4			4			2,26	1,77	1,47	0,48	2,58	1,80	0,83	1,17	0,50	0,252	3,59	1,42	1,26	0,60	0,39	0,51	3,80	1,30	0,39	0,42
45 x 30 x 4	45	30	4	4,5	2	2,86	2,24	1,48	0,74	3,06	2,23	1,21	1,58	0,80	0,434	5,77	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,63	1,52	1,19	0,65
x 5			5			3,52	2,76	1,52	0,78	3,04	2,26	1,27	1,58	0,83	0,429	6,98	2,35	1,41	2,47	1,11	0,84	8,00	1,51	1,45	0,64
60 x 30 x 5	60	30	5	6	3	4,29	3,37	2,15	0,68	3,89	2,67	1,20	1,77	0,72	0,256	15,6	4,04	1,90	2,60	1,12	0,78	16,5	1,96	1,69	0,63
x 6			6			5,08	4,59	2,20	0,72	3,86	2,69	1,25	1,75	0,74	0,252	18,2	4,78	1,89	3,02	1,32	0,77	19,2	1,95	1,99	0,63
60 x 40 x 5	60	40	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	4,10	3,01	1,68	2,10	1,10	0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
x 6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	4,08	3,02	1,72	2,10	1,12	0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
x 7			7			6,55	5,14	2,04	1,05	4,06	3,03	1,77	2,09	1,14	0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
65 x 50 x 6	65	50	6	6,5	3,5	6,58	5,16	2,04	1,29	4,52	3,60	2,15	2,39	1,50	0,575	27,2	6,10	2,03	14,0	3,77	1,46	33,8	2,27	7,43	1,06
x 7			7			7,60	5,96	2,08	1,33	4,50	3,62	2,19	2,39	1,52	0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
x 8			8			8,60	6,75	2,11	1,37	4,49	3,64	2,23	2,39	1,54	0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
x 9			9			9,58	7,52	2,15	1,49	4,48	3,63	2,28	2,36	1,57	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	2,25	10,5	1,05
75 x 50 x7	75	50	7	6,5	3,5	8,31	6,53	2,48	1,25	5,10	3,77	2,13	2,63	1,38	0,433	46,4	9,24	2,36	16,5	4,39	1,41	53,3	2,53	9,57	1,07



Oţel cornier cu aripi egale

(conform STAS 424-80)

Anexa 2d

I – moment de inerţie
W – modul de rezistenţă
} raportate la axa de încovoiere respectivă

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – rază de inerţie

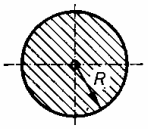
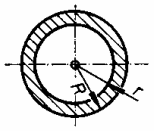
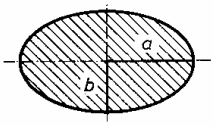
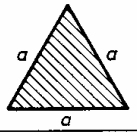
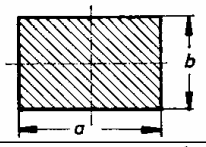
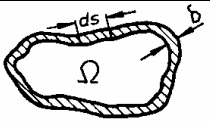
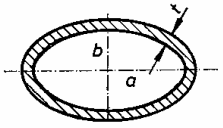
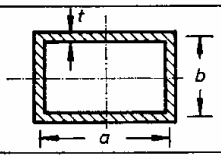
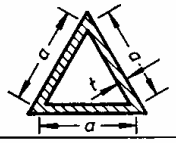
Denumirea L	Dimensiunile secţiunii mm				Secţiunea A cm²	Masa μ kg/m	Distanţa axelor cm				Mărimile statice faţă de axele de încovoiere							
											y	z		1		2		
	a	g	r	r1			e	w	v1	v2	Iy= Iz cm⁴	Wy=Wz cm³	iy=iz cm	I1 cm⁴	i1 cm	I2 cm⁴	W2 cm³	I2 cm
20x20x3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,84	0,70	0,39	0,28	0,59	0,61	0,74	0,16	0,19	0,38
x4		4			1,45	1,14	0,64		0,90	0,71	0,41	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38
25x25x3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77	1,02	0,87	0,80	0,45	0,75	1,26	0,94	0,33	0,32	0,48
x4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,60	0,63	0,43	0,40	0,48
x5		5			2,26	1,77	0,80		1,13	0,91	1,20	0,71	0,73	1,89	0,91	0,52	0,46	0,48
30x30x3	30	3	5	2,5	1,74	1,36	0,84	2,12	1,18	1,04	1,40	0,65	0,90	2,23	1,13	0,58	0,49	0,58
x4		4			2,27	1,78	0,88		1,24	1,05	1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58
x5		5			2,78	2,18	0,92		1,30	1,07	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,92	0,70	0,57
35x35x3	35	3	5	2,5	2,04	1,60	0,96	2,47	1,36	1,23	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,68
x4		4			2,67	2,09	1,00		1,42	1,24	2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68
x5		5			3,28	2,57	1,04		1,48	1,25	3,56	1,45	1,04	5,64	1,31	1,49	1,01	0,67

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea A cm^2	Masa μ kg/m	Distanța axelor, cm				Mărimile statice față de axele de încovoiere							
											y	z		1		2		
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_y = I_z$ cm^4	$W_y = W_z$ cm^3	$i_y = i_z$ cm	I_1 cm^4	i_1 cm	I_2 cm^4	W_2 cm^3	i_2 cm
90 x 90 x 8	90	8	11	5,5	13,9	10,9	2,5	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,45	43,1	12,2	1,76
x 9		9			15,5	12,2	2,54		3,59	3,18	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
x 10		10			17,1	13,4	2,58		3,65	3,26	129	21,1	2,74	204	3,43	52,5	14,4	1,75
x 11		11			18,7	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
100 x 100 x 8	100	8	12	6	15,5	12,2	2,74	7,07	3,87	3,52	145	19,9	3,06	230	3,85	59,8	15,4	1,96
x 10		10			19,2	15,0	2,82		3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95
x 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,94
120 x 120 x 10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36
x 12		12			27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35
130 x 130 x 12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
x 14		14			34,7	27,2	3,72		5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
x 16		16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
140 x 140 x 12	140	12	15	7,5	32,5	25,5	3,90	9,90	5,50	5,04	602	59,7	4,31	957	5,43	248	44,9	2,76
x 14		14			37,6	29,4	3,98		5,61	5,07	689	68,8	4,30	1094	5,42	284	50,5	2,74
x 16		16			42,2	37,3	4,20		5,90	5,09	772	79,1	4,28	1230	5,40	314	61,5	2,72
150 x 150 x 12	150	12	16	8	34,8	27,3	4,12	10,6	5,83	5,29	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95
x 14		14			40,3	31,6	1,21		5,95	5,31	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
x 16		16			45,7	35,9	4,29		6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
x 18		18			51,0	40,1	4,37		6,17	5,38	1050	98,7	4,54	1670	5,71	435	70,4	2,92
160 x 160 x 12	160	12	17	8,5	37,4	29,7	4,39	11,3	6,19	5,74	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17
x 14		14			43,3	34,0	4,47		6,30	5,77	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,4	3,16
x 16		16			49,1	38,5	4,55		6,42	5,79	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,3	3,14
x 18		18			54,8	43,0	4,63		6,53	5,82	1299	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13

Denumirea L	Dimensiunile secţiunii mm				Secţiunea A cm^2	Masa μ kg/m	Distanţa axelor, cm				Mărimile statice faţă de axele de încovoiere							
											y	z		1		2		
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_y = I_z$ cm^4	$W_y = W_z$ cm^3	$i_y = i_z$ cm	I_1 cm^4	i_1 cm	I_2 cm^4	W_2 cm^3	i_2 cm
90 x 90 x 8	90	8	11	5,5	13,9	10,9	2,5	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,45	43,1	12,2	1,76
x 9		9			15,5	12,2	2,54		3,59	3,18	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
x 10		10			17,1	13,4	2,58		3,65	3,26	129	21,1	2,74	204	3,43	52,5	14,4	1,75
x 11		11			18,7	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
100 x 100 x 8	100	8	12	6	15,5	12,2	2,74	7,07	3,87	3,52	145	19,9	3,06	230	3,85	59,8	15,4	1,96
x 10		10			19,2	15,0	2,82		3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95
x 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,94
120 x 120 x 10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36
x 12		12			27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35
130 x 130 x 12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
x 14		14			34,7	27,2	3,72		5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
x 16		16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
140 x 140 x 12	140	12	15	7,5	32,5	25,5	3,90	9,90	5,50	5,04	602	59,7	4,31	957	5,43	248	44,9	2,76
x 14		14			37,6	29,4	3,98		5,61	5,07	689	68,8	4,30	1094	5,42	284	50,5	2,74
x 16		16			42,2	37,3	4,20		5,90	5,09	772	79,1	4,28	1230	5,40	314	61,5	2,72
150 x 150 x 12	150	12	16	8	34,8	27,3	4,12	10,6	5,83	5,29	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95
x 14		14			40,3	31,6	1,21		5,95	5,31	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
x 16		16			45,7	35,9	4,29		6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
x 18		18			51,0	40,1	4,37		6,17	5,38	1050	98,7	4,54	1670	5,71	435	70,4	2,92
160 x 160 x 12	160	12	17	8,5	37,4	29,7	4,39	11,3	6,19	5,74	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17
x 14		14			43,3	34,0	4,47		6,30	5,77	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,4	3,16
x 16		16			49,1	38,5	4,55		6,42	5,79	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,3	3,14
x 18		18			54,8	43,0	4,63		6,53	5,82	1299	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13

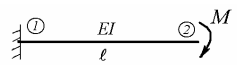
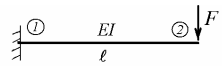
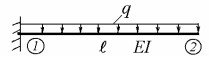
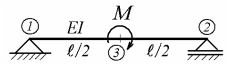
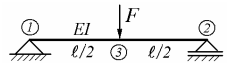
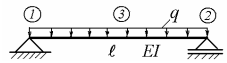
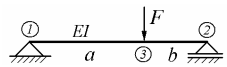
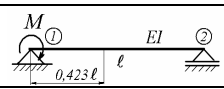
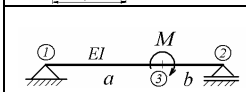
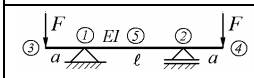
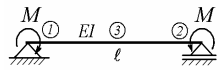
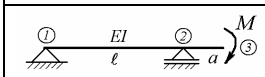
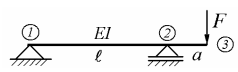
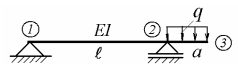
Anexa 3

Momente de inerție la răsucire

	$I_t = \frac{\pi}{2} R^4$
	$I_t = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$
	$I_t = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
	$I_t = 0{,}0216\, a^4$
	$I_t = \alpha \cdot a \cdot b^3$ a/b | 1 | 2 | 4 | 8 | ∞ α | 0,141 | 0,229 | 0,281 | 0,307 | 0,333
	***Formula lui Bredt*** $I_t = 4\Omega^2 / \oint \frac{1}{\delta} ds$
	$I_t = 4\pi \frac{a^3 b^2 t}{a^2 + b^2}$
	$I_t = 2 \frac{a^2 b^2 t}{a + b}$
	$I_t = \frac{5}{12} a^3 t$

Anexa 4

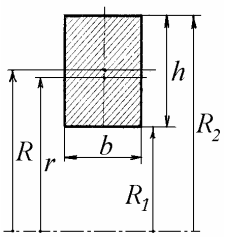
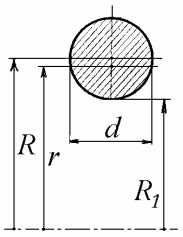
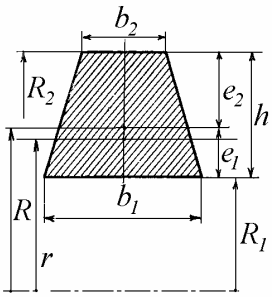
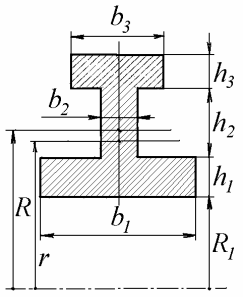
Deformații la grinzi drepte static determinate

Grinda	Rotirea	Săgeata
	$\varphi_2 = \frac{M\ell}{EI}$	$w_2 = \frac{M\ell^2}{2EI}$
	$\varphi_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$	$w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
	$\varphi_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$	$w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
	$\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{M\ell}{24EI}$	$w_3 = 0$
	$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{F\ell^2}{16EI}$	$w_3 = \frac{F\ell^3}{48EI}$
	$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{q\ell^3}{24EI}$	$w_3 = \frac{5q\ell^4}{384EI}$
	$\varphi_1 = \frac{Fab}{6\ell EI}(\ell + b)$ $\ell = a + b$	$w_3 = \frac{Fa^2b^2}{3\ell EI}$, $\ell = a + b$
	$\varphi_1 = \frac{M\ell}{3EI}, \quad \varphi_2 = -\frac{M\ell}{6EI}$	$w_{max} = \frac{M\ell^2}{9\sqrt{3}EI}$
	$\varphi_1 = \frac{M\ell}{6EI}\left(2 - \frac{6a}{\ell} + \frac{3a^2}{\ell^2}\right)$ $\ell = a + b$	$w_3 = \frac{M\ell^2}{3EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3a^2}{\ell^2} + \frac{2a^3}{\ell^3}\right)$ $\ell = a + b$
	$\varphi_1 = -\frac{Fa\ell}{2EI}, \ \varphi_4 = \frac{Fa}{2EI}(\ell + a)$	$w_5 = -\frac{Fa\ell^2}{8EI}$
	$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{M\ell}{2EI}$	$w_3 = \frac{M\ell^2}{8EI}$
	$\varphi_1 = -\frac{M\ell}{6EI}, \ \varphi_2 = \frac{M\ell}{3EI}$	$w_3 = \frac{Ma\ell}{6EI}\left(2 + 3\frac{a}{\ell}\right)$
	$\varphi_1 = -\frac{\varphi_2}{2} = -\frac{Fa\ell}{6EI}$ $\varphi_3 = \frac{Fa\ell}{6EI}\left(2 + \frac{3a}{\ell}\right)$	$w_3 = \frac{Fa^2(\ell + a)}{3EI}$
	$\varphi_2 = \frac{qa^2\ell}{6EI} = -2\varphi_1$	$w_3 = \frac{qa^3}{24EI}(4\ell + 3a)$

Anexa 5

Poziția axei neutre la bare curbe

A – aria secțiunii
R – raza centrului de greutate al secțiunii
r – raza suprafeței neutre a barei

Secțiunea	Raza suprafeței neutre, r
	$\dfrac{h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} = \dfrac{h}{\ln\dfrac{1+(h/2R)}{1-(h/2R)}} \cong R\left[1-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^2\right]$
	$\dfrac{d^2}{8R\left[1-\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}\right]}$
	$e_1 = \dfrac{h}{3}\dfrac{b_1+2b_2}{b_1+b_2}$, $e_2 = h-e_1$, $A = \dfrac{h}{2}(b_1+b_2)$ $\dfrac{A}{\dfrac{b_1R_2-b_2R_1}{h}\ln\dfrac{R_2}{R_1}-(b_1-b_2)}$
	$\dfrac{b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3}{b_1\ln\dfrac{R_1+h_1}{R_1}+b_2\ln\dfrac{R_1+h_1+h_2}{R_1}+b_3\ln\dfrac{R_1+h_1+h_2+h_3}{R_1}}$

Anexa 6

TENSOMETRIA ELECTRICĂ REZISTIVĂ

Variația rezistenței electrice a unui conductor metalic cu alungirea a fost măsurată în 1856 de W. Thompson (Lord Kelvin) cu ajutorul circuitului în punte inventat de Ch. Wheatstone în 1843. După 1930 s-au utilizat traductoare rezistive metalice nelipite şi chiar traductoare din carbon lipite pe piesele solicitate mecanic, dar acestea s-au dovedit improprii pentru măsurarea deformațiilor mici.

În 1936, Edward E. Simmons Jr. a experimentat la CalTech traductoare rezistive metalice lipite. Creatorii traductorului tensometric rezistiv lipit sunt considerați profesorii Arthur C. Ruge şi A. V. de Forest de la Massachusetts Institute of Technology, care în 1938 au conceput şi dezvoltat până la comercializare, împreună cu Hans Meier şi Frank Hines, traductoare pentru măsurarea deformațiilor specifice (*strain gauges*) din sârmă de *elinvar* (52 Fe, 36 Ni, 12 Cr), aliaj denumit ulterior *isoelastic*.

Începând cu 1952 s-au fabricat traductoare cu folie metalică (Saunders şi Roe) iar după 1954, traductoare piezorezistive, bazate pe efectul descoperit de C. S. Smith în 1954.

1. Traductorul tensometric rezistiv

Traductorul tensometric cu fir metalic este format dintr-o sârmă de diametru foarte mic, lipită în serpentină pe un suport izolant (hârtie sau bachelită). Pe schema din figura A6.1 s-au notat: *1* – firul rezistenței electrice, *2* – conductorii de legătură, *3* – suportul izolant. Supus unei deformații mecanice – lungire sau scurtare – traductorul tensometric îşi modifică rezistența electrică.

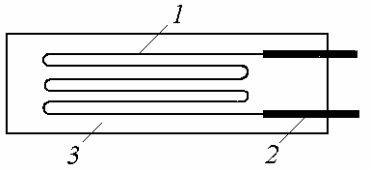


Fig. A6.1

Fie rezistența firului

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = \rho \frac{\ell^2}{V} \qquad \text{(A6.1)}$$

unde ρ este rezistivitatea materialului, ℓ - lungimea şi $V = A\ell$ volumul firului. La o variație $\Delta\ell$ a lungimii, corespunde o variație ΔR a rezistenței. Se calculează

$$\ln R = \ln\rho + 2\ln\ell - \ln V ,$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{\Delta V}{V} ,$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\varepsilon - (1-2\nu)\varepsilon = \frac{\Delta\rho}{\rho} + (1+2\nu)\varepsilon ,$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(1 + 2\nu + \frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{\ell}{\Delta\ell}\right)\varepsilon , \qquad \text{(A6.2)}$$

unde $\Delta\rho$ este variația rezistivității iar ν este coeficientul de contracție transversală.

În construcția traductoarelor tensometrice se folosesc materiale la care ρ este practic constant, fiind independent de deformație ca şi de variația temperaturii. Pentru $\Delta\rho = 0$, relația (A6.2) devine

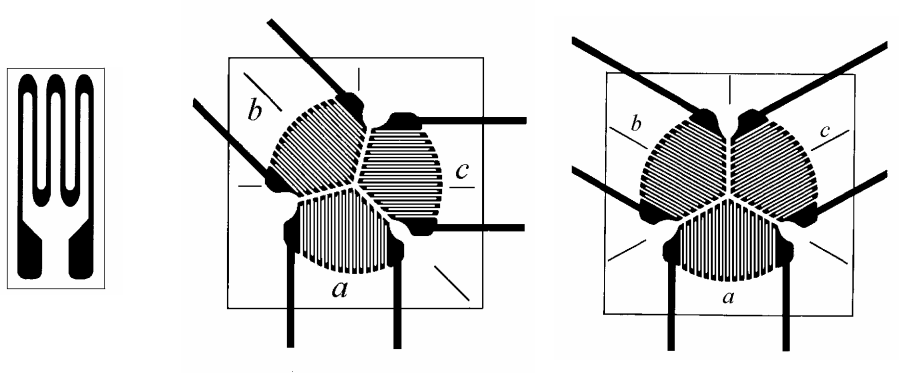
$$\frac{\Delta R}{R} = (1+2\nu)\varepsilon , \qquad \text{(A6.3)}$$

Raportul

$$k = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon} = 1 + 2\nu \qquad \text{(A6.4)}$$

se numeşte *constanta traductorului tensometric*. Cunoscând valoarea lui k (determinat experimental pe traductoare din aceeaşi serie de fabricație) şi măsurând ΔR, se poate afla alungirea specifică ε. Tensiunile se calculează apoi utilizând legea lui Hooke. Deci traductorul rezistiv măsoară de fapt "extensiuni" (deformații specifice) şi nu tensiuni.

Traductoarele tensometrice cu fir de constantan sau isoelastic au $k = 1{,}9 \ldots 2{,}6$. Traductoarele cu semiconductori au valori k până la 150, fiind deci mult mai sensibile. Variația rezistenței traductorului tensometric cu alungirea este foarte mică, deci rezistența nominală a acestora trebuie să fie relativ mare, între 100 şi 600 ohmi, ceea ce impune diametre mici de ordinul a 30 μm şi lungimi de ordinul a 125-150 mm. Cele lipite pe suport de hârtie se utilizează la temperaturi până la $80^0 C$, iar cele lipite pe suport de bachelită pot fi utilizate la temperaturi peste $260^0 C$. Traductoarele cu folie au grosimi de ordinul a 3 μm. Câteva configurații de traductoare tensometrice cu folie sunt prezentate în fig. A6.2.



a *b* *c*

Fig. A6.2

Rozeta din figura A6.2, *b* are traductoarele dispuse la 45^0. Alungirile specifice principale se calculează cu relația (9.56)

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} .$$

iar direcțiile principale - cu formula (9.57)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} .$$

Rozeta din figura A6.2, *c* are traductoarele dispuse la 120^0. Alungirile specifice principale sunt date de relația

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} . \qquad \text{(A6.5)}$$

Direcțiile principale se calculează cu formula

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)}{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c} . \qquad \text{(A6.6)}$$

Tensiunile principale se calculează în ambele cazuri cu relația (9.64).

La măsurarea unei tensiuni mecanice relativ mari $\sigma = 80\,\text{MPa}$ în oțel cu modulul de elasticitate $E = 210\,\text{GPa}$, cu un traductor având $R = 125\,\Omega$ şi $k = 2{,}1$ alungirea specifică este $\varepsilon = 3{,}81 \cdot 10^{-4}$, variația relativă a rezistenței electrice este $\Delta R/R = k\,\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$ sau 0,08%, deci $\Delta R = 0{,}1\,\Omega$. Pentru aceasta este necesară o aparatură specializată, bazată pe principiul punții Wheatstone.

2. Puntea tensometrică

În figura A6.3 se prezintă schema unui circuit potențiometric. Tensiunea U_t la bornele traductorului rezistiv R_t se poate exprima în funcție de tensiunea U aplicată celor două rezistențe

$$U_t = \frac{R_t}{R + R_t} U \,. \qquad \text{(A6.7)}$$

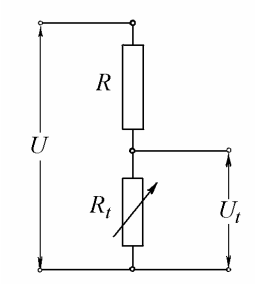
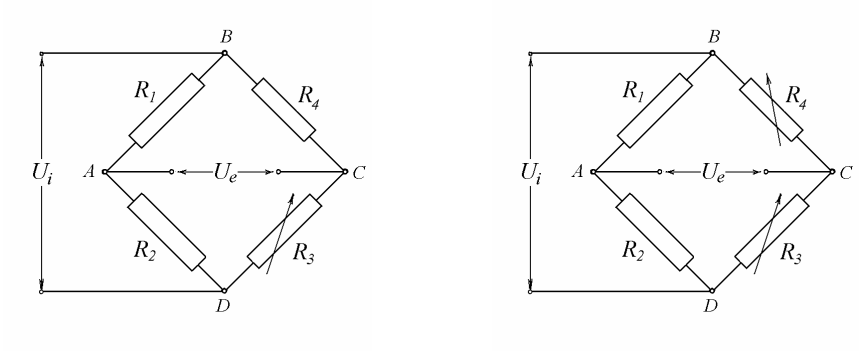


Fig. A6.3

În figura A6.4, *a* se prezintă puntea Wheatstone alimentată cu tensiune constantă, cu un singur traductor rezistiv activ R_3 lipit pe piesa solicitată mecanic. Se poate considera că puntea Wheatstone este compusă din două circuite potențiometrice legate în paralel, având aceeaşi tensiune de intrare U_i şi tensiunea de ieşire U_e măsurată între punctele lor de joncțiune *A* şi *C*.



a *b*

Fig. A6.4

Rezultă tensiunea la ieşire

$$U_e = U_A - U_C = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_3} \right) U_i ,$$

de unde se calculează raportul tensiunilor

$$\frac{U_e}{U_i} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_3 + R_4\right)} . \qquad \text{(A6.8)}$$

La măsurarea tensiunilor statice se foloseşte *metoda punţii echilibrate*. Atunci când

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \qquad \text{(A6.9)}$$

tensiunea de ieşire este nulă, $U_e = 0$, şi se spune că *puntea este echilibrată*. Se face prima citire a indicaţiei cadranului potenţiometrului R_2.

Dacă rezistenţa traductorului R_3 variază cu ΔR_3, tensiunea de ieşire va fi diferită de zero, puntea se dezechilibrează. Pentru a reechilibra puntea, se modifică rezistenţa R_2 cu ΔR_2 până la realizarea condiţiei

$$\frac{R_2 + \Delta R_2}{R_1} = \frac{R_3 + \Delta R_3}{R_4} . \qquad \text{(A6.10)}$$

Se face a doua citire a indicaţiei potenţiometrului R_2. Scala acestuia este etalonată astfel încât diferenţa celor două citiri reprezintă deformaţia specifică a piesei pe direcţia pe care este lipit traductorul R_3.

Există punţi tensometrice care funcţionează pe principiul *punţii dezechilibrate*, procedeu folosit şi la măsurarea tensiunilor dinamice.

Considerând că intensitatea curenţilor din punte nu se modifică atunci când rezistenţa traductorului variază, deoarece

$$\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}R_3} = U_i \frac{R_4}{\left(R_3 + R_4\right)^2} \qquad \text{şi} \qquad \frac{R_3 R_4}{\left(R_3 + R_4\right)^2} \cong \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}$$

variaţia tensiunii de ieşire este

$$\Delta U_e = U_i \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2} \frac{\Delta R_3}{R_3} . \qquad \text{(A6.11)}$$

Aceasta este egală cu U_e dacă puntea a fost iniţial echilibrată.

Dacă $R_1 = R_2$, atunci $\dfrac{\Delta U_e}{U_i} = \dfrac{1}{4} k\varepsilon$, deci pentru o deformație specifică $\varepsilon = 1‰ = 1000\,\mu\text{m/m}$ şi $k = 2$ rezultă $\Delta U_e / U_i = 0{,}5$ mV/V.

La *montajul în semipunte*, cu două traductoare active R_3 şi R_4 (fig. A6.4, *b*), variația tensiunii de ieşire este

$$\Delta U_e = U_i \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2} \left(\frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right), \qquad \text{(A6.12)}$$

unde s-a considerat de asemenea că intensitatea curenților rămâne constantă.

Dacă

$$\frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{\Delta R_4}{R_4},$$

atunci $\Delta U_e = 0$, puntea rămâne echilibrată. Această proprietate este utilizată pentru a elimina sensibilitatea traductorilor tensometrici rezistivi la variația temperaturii. Traductorul R_4, identic cu R_3, este lipit pe o piesă din acelaşi material însă nesolicitată mecanic, amplasată în aceleaşi condiții de mediu ambiant, compensând astfel variațiile lui R_3 cu temperatura.

Rezistențele R_1 şi R_2, împreună cu sursa de tensiune şi cu un voltmetru conectat la bornele de ieşire, fac parte din aparatul numit *punte tensometrică*. Aceasta poate să mai conțină elemente de circuit care reduc erorile introduse de rezistența conductoarelor de legătură sau care permit echilibrarea impedanțelor capacitive, în afara celor rezistive.

Dacă în toate cele patru brațe ale punții Wheatstone se conectează traductoare rezistive active (montaj în *punte completă*), atunci, considerând $\Delta R_i << R_i$, se obține

$$\frac{\Delta U_e}{U_i} = \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right). \qquad \text{(A6.13)}$$

Dacă variațiile de rezistență ΔR datorite variației temperaturii sunt aceleaşi în cele patru traductoare, acestea se compensează reciproc.

Când traductoarele sunt identice, atunci $R_1 = R_2$, $\Delta R_i / R_i = k\varepsilon_i$, şi

$$\frac{\Delta U_e}{U_i} = \frac{k}{4} \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \right). \qquad \text{(A6.14)}$$

3. Aplicații

Bară solicitată la întindere

Pe bara din figura A6.5 s-au lipit patru traductoare tensometrice rezistive (TTR) active montate în punte completă, două pe direcție longitudinală şi două transversal. Alungirea specifică longitudinală este $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \sigma / E$ iar cea transversală este $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -\nu\,\varepsilon$, unde la oțel $\nu = 0{,}3$.

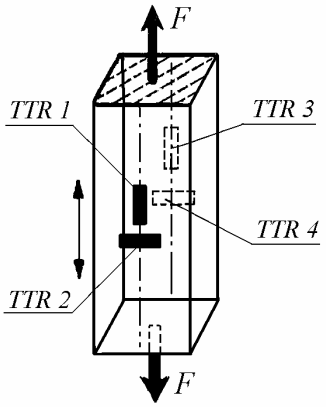


Fig. A6.5

Raportul tensiunilor (A6.14) este

$$\frac{\Delta U_e}{U_i} = \frac{k}{4}\left[\varepsilon_1 - \left(-\nu\varepsilon_1\right) + \varepsilon_3 - \left(-\nu\varepsilon_3\right)\right] = \frac{k}{4}\,2{,}6\,\varepsilon$$

deci de 2,6 ori mai mare decât dacă s-ar utiliza un singur traductor tensometric (sfert de punte), şi mai mare decât cel obținut cu două traductoare legate în semipunte. Montajul permite anularea eventualelor deformații de încovoiere dar nu permite compensarea efectului temperaturii.

Bară solicitată la încovoiere

Pe bara din figura A6.6 s-au lipit patru traductoare tensometrice active montate în punte completă, două pe fața superioară şi două pe fața inferioară a barei. Pe cele două fețe, alungirile sunt egale şi de semn contrar, deci $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = |\varepsilon_3| = |\varepsilon_4| = |\varepsilon|$.

Raportul tensiunilor (A6.14) este

$$\frac{\Delta U_e}{U_i} = \frac{k}{4}\left[\varepsilon_1 - (-\varepsilon_2) + \varepsilon_3 - (-\varepsilon_4)\right] = k|\varepsilon|.$$

Montajul permite anularea efectului deformațiilor de întindere şi compensarea efectului temperaturii, semnalul fiind dublu față de cazul montajului în semipunte.

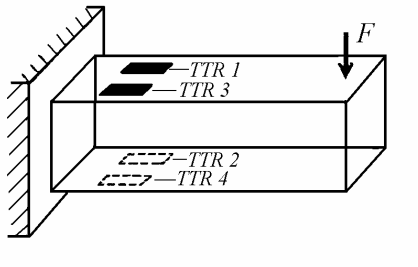


Fig. A6.6

Bară solicitată la răsucire

Pe bara din figura A6.7 s-au lipit patru traductoare tensometrice active montate în punte completă, înclinate la 45^0 față de axa barei.

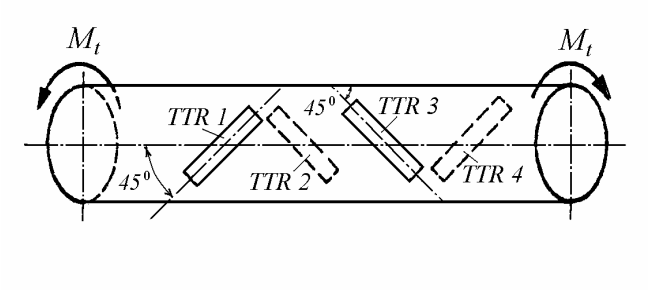


Fig. A6.7

Deoarece $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon$, raportul tensiunilor (A6.14) este

$$\frac{\Delta U_e}{U_i} = k\,\varepsilon.$$

Montajul asigură compensarea efectului temperaturii şi anularea deformațiilor specifice produse de încovoiere şi întindere, fiind utilizat la măsurarea momentului de răsucire în arbori în rotație.

Traductoarele tensometrice rezistive sunt utilizate pentru măsurarea deformațiilor elementelor elastice din componența captorilor de forțe, presiuni, cupluri, deplasări, accelerații etc.

În figura A6.8 se prezintă schemele unor captori de forțe, în care cu linii negre mai groase au fost desenate traductoarele tensometrice rezistive, lipite pe elemente elastice de diverse forme. Captorii mai robuști se folosesc la cântărirea camioanelor sau măsurarea forței pe o roată, de exemplu la un avion. Se construiesc captori de presiune, la care traductoarele sunt lipite pe o diafragmă la fel ca pe platforma captorului de forțe din figura A6.8, *e*.

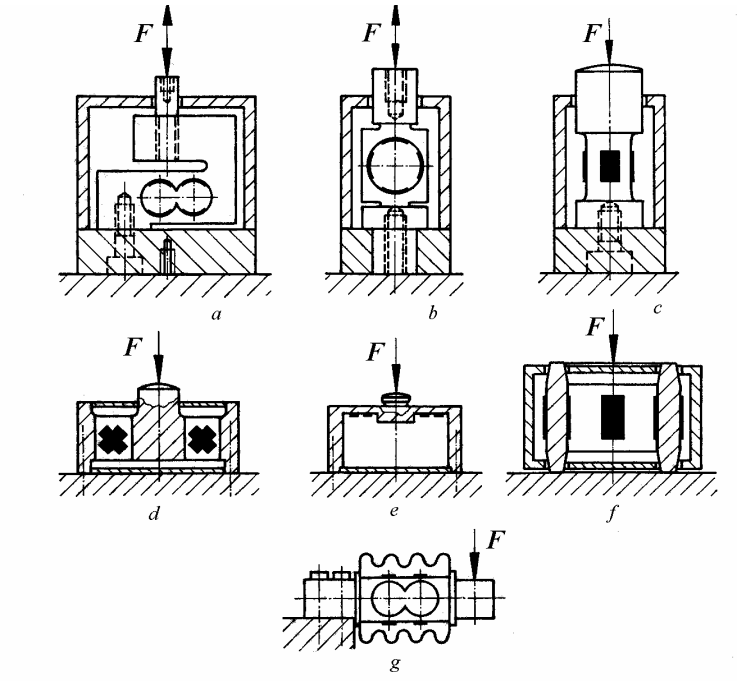


Fig. A6.8

O soluție des întâlnită este inelul circular solicitat diametral ca în fig. A6.9. Inelul este o bară curbă static nedeterminată, de secțiune dreptunghiulară, studiată în Capitolul 12 ca bară cu rază mare de curbură.

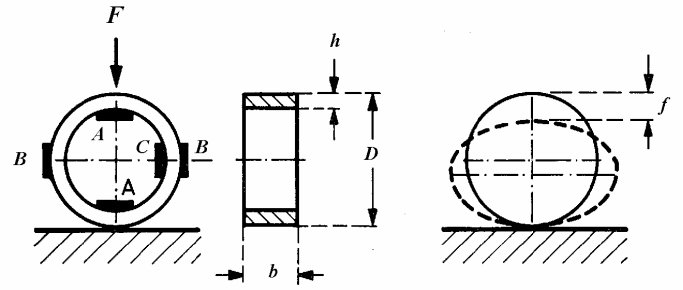


Fig. A6.9

Utilizând rezultatele de la Exemplul 12.21, pentru $h << R$, utilizând formulele de la bare drepte, se obțin următoarele valori aproximative ale alungirilor specifice în punctele *A*, *B* şi *C*:

$$\varepsilon_A = \frac{M_A}{EW} = \frac{3DF}{\pi b h^2 E},$$

$$\varepsilon_B = -\varepsilon_C = \frac{M_B}{EW} = \frac{3DF}{2\pi b h^2 E}(\pi - 2).$$

Deformația diametrală este

$$f = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\frac{D^3 F}{b h^3 E}.$$

Din formulele de mai sus se calculează valoarea forței *F*.

Pentru grosimi mai mari se ia în considerație şi efectul forței axiale.

Index

Alungire 52
– specifică 51, 228
– – principală 229
– – reală 63
Arc cilindric elicoidal 109
– de foi 190
Aria de forfecare 175
Axa neutră 159, 262
Axe centrale principale 133

Bare 7
– cotite 29, 32
– curbe 35, 205
– cu secțiune eterogenă 193
– sandvici 198

Cadre 29
Caracteristici mecanice 55
Centrul de forfecare 202
– – încovoiere 202
Cercul lui Mohr 224
Coeficient de contracție transversală 62
– – ecruisare 65
– – rezistență 65
– – siguranță 69
Compozite armate cu fibre 236
Compresiune 71
Concentrarea tensiunilor 83, 114, 191
Contracție transversală 62
Convenții de semne 16, 43
Criterii de curgere 252
– – rupere 254
Criteriul Coulomb-Mohr 254
– Mohr modificat 255
– Tresca 252
– Tsai-Hill 257
– von Mises 253
Curba caracteristică 59
Curbura 145, 157

Deformații elastice 57
– la încovoiere 175, 291
– permanente 58
– specifice 51
– volumice 233
– – specifice 233
Deplanare 101, 173
Deplasări 53
Diagrame de eforturi 22
– – – în bare cotite 29, 32
– – – – – – curbe 36
– – – – – – drepte 22
Dimensionarea 73, 97, 149
Direcții principale ale tensiunilor 216
– – de inerție 133
Dualitatea tensiunilor tangențiale 44

Ecruisarea 58
Ecuația diferențială a fibrei medii 176
– lui Poisson 233
Ecuații diferențiale de echilibru 225
– de compatibilitate 54
Eforturi în bare 15
Elasticitatea 12
Energia de deformație 234
– – – de variație a formei 236
– – – – – – – volumului 235
– – – la încovoiere 234
– – – la întindere 73
– – – la răsucire 100
Epruvete 55

Factorul de forfecare 174
– lui Bridgman 66
– de concentrare a tensiunilor 83, 114, 191
Fibra medie deformată 144
Fluxul de forfecare 107
Forfecarea pură 68, 222
Formula lui Bredt 107
– – Huygens-Steiner 131
– – Juravski 167
– – Navier 147
– – Ramberg-Osgood 61
Forță axială 18
– de lunecare 172

– tăietoare 18

Grinda de egală rezistență 189

Invarianții tensiunilor 217
Ipoteza lui Juravski 167, 203
– secțiunii plane 13
Ipotezele rezistenței materialelor 12

Încercarea la compresiune 66
– la forfecare 66
– la tracțiune 55
Încovoierea 143
– oblică 156
– pură 143
Întinderea 71
– excentrică 261
Întărirea 58
Învelişuri subțiri 48

Lamina ortotropă 236
Legea lui Hooke 54
– – – generalizată 231
Limita de curgere 58
– de elasticitate 57
– de proporționalitate 57
Linii izostatice 224
Lunecarea longitudinală 171
– specifică 52, 229

Metoda secționării 15
Modulul de elasticitate longitudinal 54
– – – secant 60
– – – tangent 60
– – – transversal 54
– – – volumic 234
Modulul de rezistență axial 148
– – – la răsucire 102
– – – polar 97
Modulul de rigiditate la încovoiere 150
– – – la întindere 72
– – – la răsucire 99
Momentul centrifugal 125
Momentul de inerție axial 125
– – – polar 96
– – – principal 134
– de răsucire 18, 93
– încovoietor 18
– static 123

Presiunea de contact 248
Principiul lui Saint-Venant 13
Profile subțiri deschise 103
– – închise 106
Proprietăți secționale echivalente 196

Raza de curbură 145
– – inerție 125
Răsucirea barelor 93
– specifică 95
– profilelor subțiri 103
Relații diferențiale de echilibru 20
– – – – la bare curbe 35
– între eforturi şi tensiuni 44
– între deformații specifice şi deplasări 52
Rezistență admisibilă 69
– la rupere 58
– la tracțiune 58
Rozeta tensometrică 230, 295

Sisteme static nedeterminate 74, 111
Solicitări combinate 261
– simple 18
Stare de tensiuni 212
– – – , plană 219
– – deformații specifice 227
Stratificat simetric 236, 242
Suprafață înclinată 86

Tensiuni 41
– de contact 247
– de forfecare 166
– în bare curbe 205
– normale 42
– octaedrale 217
– principale 221
– reale 63
– tangențiale 42, 166
– termice 74, 245, 274
Tensometria electrică rezistivă 293
Teorii de rezistență 249

Unghi de lunecare specifică 52, 229
– – răsucire specifică 95

Vas cilindric 45